

4. Prelims Abstracts

井上 陽斗

修士論文要旨

On the Existence of Ground States for Spin-Boson Model with Variable Coefficients

2MI23003M 井上 陽斗

導入

自己共役作用素のスペクトルの下限が固有値であるとき, その固有ベクトルを基底状態と呼ぶが, 本研究では変数係数のついた Spin-boson 模型における基底状態の存在と一意性を示した. Spin-boson ハミルトニアンは 2 準位原子と光子などのボソンが相互作用するような系のエネルギーを記述する自己共役作用素であり, ヒルベルト空間 $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{F}_b(L^2(\mathbb{R}^d))$ 上の自己共役作用素

$$H = \sigma_z \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes d\Gamma(\omega) + g\sigma_x \otimes \Phi(\varphi)$$

で与えられる. ここで σ_z は 2 準位原子のエネルギー, $d\Gamma(\omega)$ は場のエネルギーを表しており, $g\sigma_x \otimes \Phi(\varphi)$ が原子と場の相互作用を表している. また ω は分散関係と呼ばれ 1 個のボソンのエネルギーを表し, $g \in \mathbb{R}$ は結合定数と呼ばれ相互作用の強さを表す.

場の量子論におけるハミルトニアンのスペクトルは, 主に $\omega = \sqrt{-\Delta + m^2}$ の場合に研究されてきた. ここで m は 1 個のボソンの質量を表す定数である. φ が赤外正則であるとは $\varphi/\omega \in L^2(\mathbb{R}^d)$ であるときをいい, 基底状態の存在はこの赤外正則性に大きく依存する. 現在では赤外正則性の仮定のもと, 場の量子論の標準的な模型である Pauli-Fierz 模型, Nelson 模型, Spin-boson 模型で基底状態が存在することが示されている [1–3, 8, 10]. また赤外正則性が成り立たない場合は, Pauli-Fierz 模型では基底状態の存在 [8], Nelson 模型では基底状態の非存在 [5, 11], Spin-boson 模型では $g < g_0$ のもとでの基底状態の存在および $g > g_0$ のもとでの基底状態の非存在が示されている [4, 9].

空間の次元を 3 としたとき, 曲がった時空上で Nelson 模型を考えると

$$\omega = \sqrt{-\sum_{1 \leq j, k \leq 3} \partial_j a_{jk}(x) \partial_k + m^2(x)}$$

の形の変数係数が入ったハミルトニアンが得られる. $\omega = \sqrt{-\Delta + m^2}$ の時に m が 1 個のボソンの質量を表していたことから, 曲がった時空上では 1 個のボソンが位置によって変化する質量 (variable mass) を持っているように思える. 曲がった時空上の Nelson 模型の基底状態の存在は variable mass の空間減衰に依存している. 簡単にいうと $m(x)$ が遅く 0 に減衰するとき基底状態が存在するが, 速く 0 に減衰するとき基底状態は存在しない. 正確には $m(x)$ がある実数 $a > 0$ に対して $m(x) \geq a \langle x \rangle^{-1}$ を満たすとき基底状態が存在し, ある実数 $b > 0, \beta > 1$ に対して $m(x) < b \langle x \rangle^{-\beta}$ を満たすとき基底状態が存在しないことが証明されている [6, 7]. ここで $\langle x \rangle = \sqrt{1 + |x|^2}$ である.

本研究では,

$$\omega = \sqrt{-\sum_{1 \leq j, k \leq 3} \partial_j a_{jk}(x) \partial_k + m^2(x)}, \quad m(x) \geq a \langle x \rangle^{-1}$$

とした Spin-boson 模型が一意的な基底状態を持つことを示した. 本証明で重要な役割を果たすのは赤外正則性と Feynman-Kac の公式である.

定義と主定理

ヒルベルト空間 $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^3))$ とする.

IV 学生レポート 等

仮定 1 (Cutoff function) (1) $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$.

(2) $\varphi(x) \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^3$.

分散関係 ω を次で定義する:

$$\omega := \sqrt{-\sum_{1 \leq j, k \leq 3} \partial_j a_{jk}(x) \partial_k + m^2(x)}.$$

ここで, $a_{jk}(x), m(x)$ は実関数.

仮定 2 (分散関係)

$$\begin{aligned} C_0 \mathbb{1} &\leq [a_{jk}(x)] \leq C_1 \mathbb{1}, C_0 > 0 \\ \partial_x^\alpha a_{jk}(x) &\in O(\langle x \rangle^{-1}), |\alpha| = 1, \\ \partial_x^\alpha m(x) &\in O(1), |\alpha| \leq 1, \\ m(x) &\geq a \langle x \rangle^{-1} \text{ for some } a > 0. \end{aligned}$$

ここで $\langle x \rangle = \sqrt{1 + |x|^2}$ である.

$\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 H を次で定義する:

$$H := \sigma_z \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes d\Gamma(\omega) + \sigma_x \otimes \Phi(\varphi).$$

ここで $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \Phi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{(a(\varphi) + a^*(\varphi))}$ である. H のことを Spin-boson ハミルトニアンという. H の基底状態が存在し一意であることと, $H+1$ とユニタリ同値な作用素の基底状態が存在し一意であることは同値なので, $H+1$ をユニタリ変換した作用素の基底状態の存在と一意性を示す. $\tilde{H}$ を次で定める:

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= (U \otimes \mathbb{1})(H+1)(U \otimes \mathbb{1})^* \\ &= (\mathbb{1} - \sigma_x) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes d\Gamma(\omega) + \sigma_z \otimes \Phi(\varphi). \end{aligned}$$

ここで $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_y}$ はユニタリ作用素.

次が主定理である.

定理 1 (主定理) 仮定 1, 仮定 2 を仮定する. このとき H は一意的な基底状態を持つ.

証明の概略

次の事実が成り立つことが示せる.

補題 1 (赤外正則性) 仮定 1, 仮定 2 を仮定する. このとき $\varphi \in D(\omega^{-1})$ が成り立つ.

補題 2 (Feynman-Kac の公式) 仮定 1, 仮定 2 を仮定する. このとき次が成り立つ.

$$(\Phi, e^{-T\tilde{H}}\Psi) = \mathbb{E}_X \left[\left(J_0 \Phi(X_0), e^{-\int_0^T \phi_E(j_t f) X_t dt} J_T \Psi(X_T) \right) \right]_{L^2(\mathcal{Q}_E)}.$$

補題 3 $(\mathcal{M}, \mu_{\mathcal{M}})$ を確率空間, L は $L^2(\mathcal{M}, d\mu_{\mathcal{M}})$ 上の自己共役作用素であり, 任意の $t > 0$ に対し e^{-tL} が positivity preserving であるとする. $\gamma(T) = \frac{(1, e^{-TL}1)^2}{\|e^{-TL}1\|^2}$ とし,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \gamma(T) > 0.$$

を仮定する. このとき L は基底状態を持つ.

補題 4 (Perron-Frobenius の定理) $(\mathcal{M}, \mu_{\mathcal{M}})$ を確率空間, L は $L^2(\mathcal{M}, d\mu_{\mathcal{M}})$ 上の自己共役作用素であり, 任意の $t > 0$ に対し e^{-tL} が positivity preserving, さらに L が基底状態を持つとする. このとき次の (1), (2) は同値である:

- (1) L は単純で strictly positive な基底状態を持つ.
- (2) 任意の $t > 0$ に対し e^{-tL} は positivity improving.

定理 1 の証明の概略 Step 1: Feynman-Kac の公式を使って任意の $T > 0$ に対し $e^{-T\tilde{H}}$ が positivity improving であることを示す.

Step 2: Feynman-Kac の公式 から 任意の $T > 0$ に対し $\gamma(T) \geq e^{-\frac{I}{2}}$ が示せる. ここで, $I = \|\omega^{-1}\varphi\|^2$. 赤外正則性より $I < \infty$ だから $\lim_{T \rightarrow \infty} \gamma(T) \geq e^{-\frac{I}{2}} > 0$. よって補題 3 より $\tilde{H}$ は基底状態を持つ.

Step 3: Step 1 で示した $e^{-T\tilde{H}}$ が positivity improving であることから Perron-Frobenius の定理より基底状態の一意性が成り立つ.

Step 4: $\tilde{H}$ が一意的な基底状態を持つことと H が一意的な基底状態を持つことは同値なので主定理が成り立つ. $\square$

参考文献

- [1] Asao Arai and Masao Hirokawa. “On the Existence and Uniqueness of Ground States of the Spin-Boson Hamiltonian”. *Hokkaido University Preprint Series in Mathematics*, 309: 2–20, 1995.
- [2] Asao Arai and Masao Hirokawa. “On the existence and uniqueness of ground states of a generalized spin-boson model”. *J. Funct. Anal.*, 151: 455–503, 1997.
- [3] Volker Bach, Jürg Fröhlich, and Israel Michael Sigal. “Renormalization group analysis of spectral problems in quantum field theory”. *Adv. Math.*, 137: 205–298, 1998.
- [4] Volker Betz, Benjamin Hinrichs, Mino Nicola Kraft, and Steffen Polzer. *On the Ising Phase Transition in the Infrared-Divergent Spin Boson Model*. 2025. arXiv: 2501.19362 [math-ph]. URL: <https://arxiv.org/abs/2501.19362>.
- [5] Jan Dereziński and Christian Gérard. “Scattering theory of infrared divergent Pauli-Fierz Hamiltonians”. *Ann. Henri Poincaré*, 5: 523–577, 2004.
- [6] Christian Gérard, Fumio Hiroshima, Annalisa Panati, and Akito Suzuki. “Infrared problem for the Nelson model on static space-times”. *Comm. Math. Phys.*, 308: 543–566, 2011.
- [7] Christian Gérard, Fumio Hiroshima, Annalisa Panati, and Akito Suzuki. “Absence of ground state for the Nelson model on static space-times”. *J. Funct. Anal.*, 262: 273–299, 2012.
- [8] Marcel Griesemer, Elliott H. Lieb, and Michael Loss. “Ground states in non-relativistic quantum electrodynamics”. *Invent. Math.*, 145: 557–595, 2001.
- [9] David Hasler, Benjamin Hinrichs, and Oliver Siebert. “On existence of ground states in the spin boson model”. *Comm. Math. Phys.*, 388: 419–433, 2021.
- [10] Masao Hirokawa, Fumio Hiroshima, and József Lőrinczi. “Spin-boson model through a Poisson-driven stochastic process”. *Math. Z.*, 277: 1165–1198, 2014.
- [11] Jozsef Lorinczi, Robert A. Minlos, and Herbert Spohn. *The infrared behaviour in Nelson’s model of a quantum particle coupled to a massless scalar field*. 2000. arXiv: math-ph/0011043 [math-ph]. URL: <https://arxiv.org/abs/math-ph/0011043>.

IV 学生レポート 等

本プログラムにおける今後3年間の活動の方向と到達目標

井上 陽斗 (2MI23003M)

マス・フォア・イノベーション連係学府 数理学系

指導教員：廣島 文生 教授, 共創メンター：廣川 真男 教授

令和6年度

今後の研究方針と博士論文の展望

修士論文では $m(x)$ が遅く減衰している場合のスピンボゾン模型の基底状態の存在を示したが, $m(x)$ の減衰が速い場合の基底状態の存在に関する研究を引き続き行うつもりである. $m(x)$ の減衰が速い時は赤外正則性が成り立たないため, 基底状態の存在/非存在の証明が困難になり数学的に興味深い問題である.

数学創発モデリングでは以下のような Jaynes-Cummings(JC) 模型と Rabi 模型の中間的な模型において結合定数 g_1, g_2 の変化に応じて基底状態と励起状態の入れ替わり (crossing) がどのように起こるか調べたいと考えている:

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega_a\sigma_z + \hbar\omega_c(a^\dagger a + \frac{1}{2}) + \hbar g_1(\sigma_- a^\dagger + \sigma_+ a) + \hbar g_2(\sigma_+ a^\dagger + \sigma_- a).$$

JC 模型は $g_2 = 0$, Rabi 模型は $g_1 = g_2$ に相当する. JC 模型では crossing が起こるが, Rabi 模型では crossing が起こらないため, それらの間の模型を調べることで基底状態と励起状態の交差が現れる因子を見つけたいと思っている.

博士論文では場の量子論の基底状態に関することをテーマにしたいと考えているが, 現時点では具体的な目処はついていない.

共創力強化インターンシップへの展望

インターンシップでは数学的な場の量子論の研究や応用を行っている大学または研究機関へ行って専門分野の理解を深めたいと考えている.

卓越大学院イベントに関する抱負

博士前期課程では時間的な都合もありなかなか参加することができなかったが, 今後3年間ではスタディグループワークショップやマス・フォア・イノベーションカフェ・セミナーなどに積極的に参加し, 様々な分野の方々と交流を深めたいと考えている.

セミナー、研究集会への参加状況、研究発表状況

卓越大学院の支援を受けて, 聴講のみではあるが京都大学で行われた「量子場の数理論とその周辺」研究集会に 2023 年と 2024 年の2回にわたって参加させていただいた.

岩倉 康樹

Prelims 予稿1

岩倉 康樹

マス・フォア・イノベーション連係学府 数理学系

令和6年度

私は修士論文で可微分写像の特異点論における非特異拡張問題の解決に取り組んだ。この問題は、与えられた(一般には特異な)写像を非特異な写像へと拡張できる条件を問うている。非常に自然な問題であるが、研究には境界付き多様体上の写像の特異点の性質を深く理解する必要がある。しかし、それらの性質には未解明な部分が多いため、本問題はこれまで($\mathbb{R}$ 値)Morse 関数に関連したもの以外は手付かずであった。問題の正確な主張は以下である。

問題 1. M を m 次元閉多様体, L を多様体とし, $g: M \times [0, 1) \rightarrow L$ は境界 $M \times \{0\}$ への制限が一般には特異である沈め込みとする。このとき、境界として M を持つコンパクト $(m+1)$ 次元多様体 N と沈め込み $F: N \rightarrow L$ で以下の図式を可換するものが存在するための条件は何か？

$$\begin{array}{ccc} M \times [0, 1) & \xrightarrow{g} & L \\ \downarrow i & \nearrow F & \\ N & & \end{array}$$

ここで, i は $M \times \{0\}$ と ∂N を同一視した上で ∂N のカラー近傍である。

上の定式化では、境界のカラー近傍上の写像の拡張を考える。多くの閉多様体上の写像は、 $[0, 1)$ で厚みを付けても、その上へ非特異に拡張できる。したがって、上の定式化であっても本来の趣旨は失われていない。また、図 1 は問題の概略を表している。

修士論文では、上述の問題における 2 つの場合の研究に取り組んだ。

1. M が向き付け可能な閉曲面, $L = S^1$, $g|_{M \times \{0\}}$ が S^1 値 Morse 関数の場合。
2. M が向き付け可能な閉曲面, $L = \mathbb{R}^2$, $g|_{M \times \{0\}}$ が horizontal stable fold map の場合。

修士論文の Section2 では場合 1 に関する結果が得られた。内容は [?] を参考にしている。

定理 2. M を向き付け可能な閉曲面, $g: M \times [0, 1) \rightarrow S^1$ を境界への制限 $f = g|_{M \times \{0\}}$ が S^1 値 Morse 関数である沈め込みとする。このとき、以下の主張は同値である。

- (1) コンパクトで向き付け可能な 3 次元多様体 N , g の非特異拡張 $F: N \rightarrow S^1$ が存在する。
- (2) 有限個の有限グラフと S^1 の非交和 V , 辺や S^1 上ではめ込みとなる連続写像 $h: V \rightarrow S^1$, $\bar{f}$, h に関する allowable collapse $C: W_f^{\bar{f}} \rightarrow V$ が存在する。

この結果は、Curley [?] が向き付け可能な閉曲面上の ($\mathbb{R}$ 値)Morse 関数に対して得た結果の一般化である。Curley は “allowable collapse” という組合せ的な対象を用いて拡張が存在するための必要十分条件を与えた。そこで私は “allowable collapse” を S^1 値 Morse 関数に適合するように一般化することで上記の結果を得た。

修士論文の Section3 では場合 2 に関する結果が得られた。内容は [?] を参考にしている。

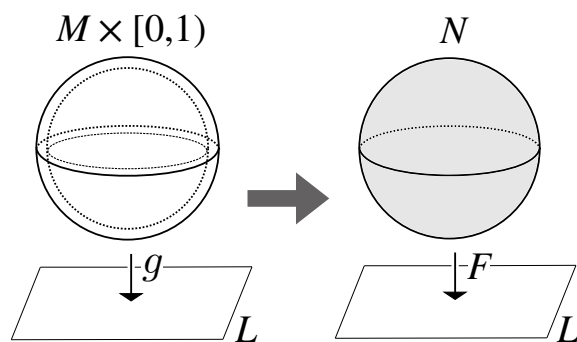


図 1: 問題の概略図.

定理 3. M を有向閉曲面, $g: M \times [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ を境界への制限 $f = g|_{M \times \{0\}}$ が *horizontal stable fold map* である沈め込みとする. このとき, 以下の主張は同値である.

- (1) 境界に M を持つコンパクト有向 3 次元多様体 N , ファイバーに S^1 成分を持たない g の非特異拡張 $F: N \rightarrow S^1$ が存在する.
- (2) g の *admissible map* $\delta: \mathcal{R}_f \rightarrow \mathcal{M}$ が存在する.

この結果は Morse 関数の一般化である stable map に関して行なった研究である. 研究する際には, stable map に “horizontal” や “fold” という条件を課した. それにより, 拡張の存在を “admissible map” という組合せ的な対象の存在に言い換えることに成功した.

参考文献

- [1] C. Curley, *Non-singular extensions of Morse functions*, Topology (1) **16** (1977), 89–97.
- [2] K. Iwakura, *Non-singular extensions of circle-valued Morse functions*, Proc. of MSJ-SI 2022, Deepening and Evolution of Applied Singularity Theory, submitted.
- [3] K. Iwakura, *Non-singular extensions of horizontal stable fold maps from surfaces into the plane*, preprint, 2024, arXiv:2410.22693.
- [4] N. Shibata, *On non-singular stable maps of 3-manifolds with boundary into the plane*, Hiroshima J. Math. **30** (2000), 415–435.

Prelims 予稿 2

岩倉 康樹

マス・フォア・イノベーション連係学府 数理学系

指導教員：佐伯 修 教授，共創メンター：佐竹 暁子 教授

令和 6 年度

0.1 今後の研究方針

博士前期課程では、非特異拡張の存在と同値な条件を得ることを目標としていた。しかし、一般の写像に対してこの方針で良い判定法を得るのは難しいようである。そこで必要条件と十分条件に条件を分けることで使いやすい定理の開発を行う。例えば以下のように問題を考える。

必要：「境界付き多様体から別の多様体への沈め込みが与えられたとき、この沈め込みが満たす性質は？」が元の問題である。定義域多様体に注目した場合、「境界上への制限が一般には特異である沈め込みについて、定義域多様体の微分同相類は？」が考えられる。まず、Shibara により導入された最も簡単な特異点しか持たない boundary special generic map を研究する。その後、状況を一般化する。

十分：「与えられた写像を拡張するために必要な情報は？」が元の問題である。実際には「(一般には特異な) 拡張が与えられたとき、非特異に変形できるか？」を考える。その際、新たに境界付き多様体上の写像に適合した変形を開発したい。

0.2 博士論文の展望

上述の境界付き多様体上の写像の特異点論についての研究を行い、博士論文を執筆する予定である。具体的な内容についてはまだ未定である。

0.3 共創力強化インターンシップへの展望

海外の研究者への訪問を希望している。しかし、境界付き多様体上の写像の特異点論を研究している人は海外にはいない。従って、今後新たな課題を見つけて、それに関連した研究者を訪問をしようと考えている。時期は、可能であれば博士 1 年の後期、そうでなければ博士 2 年の前期を考えている。

0.4 卓越大学院イベントに関する抱負

SGW には学部 3, 4 年、修士 1 年のときに参加した。それぞれ弁護士事務所におけるファイヤーウォール、化学物質の結晶構造、企業データへの多目的最適化の応用に関する研究を行った。博士後期課程進学後も時間が許す限り参加し、数学の他分野への応用の方法を学びたい。

本年度、MEI セミナーの世話人を務めた。世話人として、富士通研究所所属の櫻井大輔先生をお呼びし、講演していただいた。来年度も今年度と同様、積極的にセミナー参加や運営を行い、数学の社会との関わりについて学びたい。

0.5 研究集会への参加状況、研究発表状況

特異点論や微分トポロジー、BVOCs に関する集会に参加し、発表や聴講している。博士前期課程では 11 件の集会で発表させていただいた。今後も集会への参加と発表を通じて知識を蓄え、研究に活かしていきたい。

修士論文要旨

津阪 耀 (2MI23001K)

マス・フォア・イノベーション連係学府 数理学系

指導教員：瀬片 純市 教授，共創メンター：内田 誠一 教授

令和 6 年度

修士論文の要旨

私の修士論文の題目は，”Hardy-Hénon 型方程式の解の挙動について”であり，以下の 2 つのテーマについて考察した．

1. Hardy-Hénon 型方程式の適切性

Hardy-Hénon 型方程式と呼ばれる次の非線形放物型偏微分方程式の初期値問題について考察した．

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = a \cdot |\cdot|^{-\gamma} |u|^\alpha u, & \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \\ u(0, \cdot) = \varphi(\cdot), & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (1)$$

方程式の名前になっている Hénon はフランスの天文学者であり，彼は 1974 年にこの方程式の定常問題，すなわち，時間に依存しない解を求める問題を，恒星系の運動を表すモデルとして提案した．

本論文では，初期値問題 (1) の適切性に関する結果について考察した．適切性に関連する既存の結果はいくつかあるが，代表的なものを挙げると，Wang [4] が， $N \geq 3$ ， $a > 0$ ， $\gamma < 2$ の場合に，縮小写像の原理を用いることで，有界かつ連続な関数全体 $C_B(\mathbb{R}^N)$ における時間局所解の存在を示した．さらに，優解と劣解を構成して比較原理を用いることで時間大域解の存在とその時間大域挙動に関する結果を示した．また，Ben Slimene-Tayachi-Weissler [1] は， p 乗可積分な関数全体 $L^p(\mathbb{R}^N)$ と空間遠方で 0 に収束する連続関数全体 $C_0(\mathbb{R}^N)$ における局所適切性と時間大域解の存在，さらにその時間大域挙動に関する結果を示した．修士論文では，Ben Slimene-Tayachi-Weissler [1] の結果について，証明をより詳しく与えた．彼らの結果の一部を述べる．

定義 1. u が積分方程式

$$u(t) = e^{t\Delta} \varphi + a \int_0^t e^{(t-s)\Delta} (|\cdot|^{-\gamma} |u(s)|^\alpha u(s)) ds \quad (2)$$

の解であるとき， u は (1) の mild solution であるという．

定理 2 (Ben Slimene-Tayachi-Weissler [1]). $N \geq 1$ を整数， $\alpha > 0$ とし， γ は $0 < \gamma < \min(2, N)$ を満たすとする．また， $q_c := \frac{N\alpha}{2-\gamma}$ と定める．このとき，次が成り立つ．

(i) (2) は $C_0(\mathbb{R}^N)$ において，時間局所適切である．

(ii) q を

$$q > \frac{N(\alpha+1)}{N-\gamma}, \quad q > q_c, \quad q < \infty$$

を満たす実数とする．このとき，(2) は $L^q(\mathbb{R}^N)$ において，時間局所適切である．

2. 一般化した Hardy-Hénon 型方程式の定常解の漸近展開

本修士論文ではさらに, Hardy-Hénon 型方程式のより一般的な形を持つ次の方程式の初期値問題についても考察した.

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = K(|x|)u^p, & \text{in } (0, T) \times \mathbb{R}^N, \\ u(0, \cdot) = \varphi(\cdot), & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (3)$$

本論文では, (3) に対して, 正値かつ球対称な定常解の漸近展開について考察した. 定常解の性質に関連する既存の結果はいくつか知られており, Deng-Li-Liu [3] は, p とある臨界指数との大小によって, 2 つの異なる正値球対称定常解のグラフの交わり方が大きく異なることを示した. さらに, Deng-Li-Liu [2] は, 正値球対称定常解の空間遠方での漸近展開を計算し, その挙動を調べた. 修士論文では, Deng-Li-Liu [2] の結果について, 証明をより詳しく与えた. 彼らの結果の一部を述べる.

定理 3 (Deng-Li-Liu (2003)). K は

- (i) $K > 0$ かつ $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-l} K(r) = k_\infty > 0$.
- (ii) $K(r)$ は r について微分可能かつ $[\frac{d}{dr}(r^{-l} K(r))]^+ \in L^1$.
- (iii) $r > 0$ に対して, $\frac{d}{dr}(r^{-l} K(r)) \leq 0$.

を満たすとし, u を (3) の正値球対称定常解とする. このとき, $p > p_c$ かつある整数 $\Lambda > 1$ に対して, $\Lambda p_c < p < (\Lambda + 1)p_c$ ならば, $r = \infty$ で,

$$u(r) = \frac{L}{k_\infty^{1/(p-1)} r^m} + \frac{a_1}{r^{m+\lambda_1}} + \frac{a_2}{r^{m+2\lambda_1}} + \cdots + \frac{a_\Lambda}{r^{m+\Lambda\lambda_1}} + \frac{b_1}{r^{m+\lambda_2}} + \cdots + O\left(\frac{1}{r^{N-2+\varepsilon}}\right). \quad (4)$$

参考文献

- [1] B. Ben Slimene, S. Tayachi, and F. B. Weissler, *Well-posedness, global existence and large time behavior for Hardy-Hénon parabolic equations*, Nonlinear Anal. **152** (2017), 116–148. MR3606306
- [2] Y. Deng, Y. Li, and Y. Liu, *On the stability of the positive radial steady states for a semilinear Cauchy problem*, Nonlinear Anal. **54** (2003), no. 2, 291–318. MR1979735
- [3] Y. Liu, Y. Li, and Y. Deng, *Separation property of solutions for a semilinear elliptic equation*, J. Differential Equations **163** (2000), no. 2, 381–406. MR1758703
- [4] X. Wang, *On the Cauchy problem for reaction-diffusion equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **337** (1993), no. 2, 549–590. MR1153016

IV 学生レポート 等

本プログラムにおける今後3年間の活動の方向と到達目標

津阪 耀 (2MI23001K)

マス・フォア・イノベーション連係学府 数理学系

指導教員: 瀬片 純市 教授, 共創メンター: 内田 誠一 教授

令和6年度

今後の研究方針と博士論文の展望

修士論文内での考察を経て, Hardy-Hénon 型方程式の定常解について, その安定性に関する以下の主張が成り立つことがわかった.

- 定理 1.** (i) $p = p_c$ とする. このとき, 要旨の (3) で $K(|x|) = |x|^l$, $l > -2$ とした場合の任意の正値球対称定常解 u_α は $0 < \mu < 1$ のとき, ある重みつき L^∞ ノルム $\|\cdot\|_\mu$ について弱漸近安定であり, $\mu > 1$ のとき, $\|\cdot\|_\mu$ について安定でない.
- (ii) $p > p_c$ とする. 要旨の (3) で $K(|x|) = |x|^l$, $l > -2$ とした場合の任意の正値球対称定常解 u_α は $m + \lambda_1 < \lambda < m + \lambda_2$ のとき, (i) とは別の重みつき L^∞ ノルム $\|\cdot\|_\lambda$ について弱漸近安定であり, $0 < \lambda < m + \lambda_2$ または $\lambda \geq N$ のとき, $\|\cdot\|_\lambda$ について安定でない.

尚, 本結果について類似の結果が見つかったため, 今後更なる拡張を行うことを試みている. また, Hardy-Hénon 型方程式の定常解に対して大域的な漸近安定性や, 増大解の存在と非存在について調べる予定である. さらに, Hardy-Hénon 型方程式からさらに一般的な形を持つ方程式である要旨の (3) に対しても同様の議論を行うことで, 増大解の存在/非存在のための K が満たすべき条件について研究していく.

共創モデリングでは, PINN と呼ばれる深層学習を用いた偏微分方程式の数値計算技術について, 理論と実装の両方の側面から理解を進めてきた. 具体的には, 1次元線形熱方程式に対して実際にコードを動かすことで解の挙動を調べた. しかし, 他の方程式に対しての実装はまだ行っていないため, 創発モデリングでは, 非線形性を持つ方程式や高次元の方程式など, 様々な方程式に対してどのくらい PINN が適用できるか, 適用できない場合には何が原因になっているか等を調べたい.

共創力強化インターンシップへの展望

現時点では, 海外のインターンシップを希望しているが, インターンシップ先の大学や研究機関はまだ確定していない. 修士での研究を経て少しずつ研究の方向性が定まってきた段階であるため, 取り組む研究テーマを模索しながら並行して調べていく予定である.

卓越大学院イベントに関する抱負

SGW にはこれまでも参加していたが今後も可能な限り参加し, 現実課題に対する数学を用いた解決のアプローチを学ぶことで将来的に社会貢献したいと考えている. マス・フォア・イノベーションカフェ・セミナーにも可能な限り参加し, 自分自身の分野に縛られず幅広く様々な分野の勉強をしたい. また, 学生や研究者との交流を通して様々な情報交換を行い, 自分自身の視野を広げたい.

セミナー、研究集会への参加状況、研究発表状況

九州関数方程式セミナーに参加し, 学内だけでなく学外の PDE に関連する研究者の話を聞くことで, 研究テーマを探りながら幅広く勉強をするように努めてきた. 研究発表等はまだ行っていないが, 様々な研究集会に参加し, 他大学の学生や先生方の研究について講演を聞いた.

西 康汰

修士論文要旨

西 康汰 (2MI23002T)

マス・フォア・イノベーション連係学府 数理学系

指導教員：手老 篤史 准教授

令和6年度

1 研究背景

真正粘菌 *Physarum polycephalum* の変形体 (以下, 粘菌) は, アメーバ状の単細胞生物である。脳機能を持たないにも関わらず, 知的な行動が見られることが知られている。例えば, 効率的なネットワーク形成能力 [1, 2] や, 周期的な刺激を予測する記憶・想起行動 [3], 繰り返し刺激に対する慣れの行動である馴化 (じゅんか) [4] などが報告されている。本研究では, Boisseau et al. [4] が報告している粘菌の馴化に注目する。

通常, 粘菌は餌を探すためにゆっくりと前進を行っている。一方で, キニーネと呼ばれる忌避物質に遭遇すると前進速度を低下させることが知られている [5]。Boisseau et al. [4] は, このようなキニーネ刺激下での前進速度の低下を用いて粘菌で馴化を実証した。彼らは, 粘菌に1日1回キニーネを含んだ寒天領域 (以下, キニーネ領域) またはキニーネを含まない通常の寒天領域 (以下, 通常領域) のいずれかを通過させている。このとき領域の長さは一定にしており, 領域を通過した先には餌を設置している。9日間, 各日ごとにキニーネ領域または通常領域のいずれかを設置して, 粘菌の先端が領域に侵入してから餌に到達するまでの時間 (領域通過時間) を測定している。実験結果を簡潔にまとめると, 以下の3点になる。(i) キニーネ刺激を繰り返すとキニーネ領域の通過時間が短くなる。(ii) 刺激をしばらく停止するとキニーネ領域の通過時間が回復する。(iii) 刺激に曝された経験に依存せず通常領域の通過時間は, ほぼ一定である。特に (i), (ii) は, それぞれ馴化の特徴である反応減弱と自発的回復を表している。

本研究では, 粘菌が脳機能なしで馴化を実現するメカニズムを数理モデリングにより提案する。

2 研究結果

粘菌の馴化メカニズムを次の数理モデルにより提案した。

$$\frac{d}{dt}\ell(t) = \gamma(p_b(t) - p_f(t)) \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}p_f(t) = -d(p_f - p_b) + F_f(p_f) \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt}p_b(t) = -r_v d(p_b - p_f) + F_b(p_b) \quad (3)$$

$$F_f(p_f) = (1 - h(t))(-a_{de}p_f + g_f) + h(t)(-a_{de}^s p_f + g_f^s)$$

$$F_b(p_b) = -a_{de}p_b + g_b$$

ここで, ℓ は粘菌の先端の位置 [m], p_f, p_b はそれぞれ前方, 後方におけるゾル圧 [Pa] である。式 (1) は粘菌の移動を表す運動モデルである。粘菌は移動端で内部のゾルが押し出されることにより, 外皮ゲルを拡張して前

IV 学生レポート 等

進を行っている。そこで粘菌の先端の拡張速度は、移動端へのゾルの体積流量に比例するものとした。また粘菌のゾルの流速分布は、直径一定の円筒管のポアズイユ流で近似できることが知られていることから、式 (1) の運動モデルが得られた。式 (2), (3) は粘菌の内部処理系を表す制御モデルである。ゾル圧は粘菌の外皮ゲルの収縮により生み出されている。また、外皮ゲルの収縮に関する化学物質の存在が知られている。本研究では、そうした化学物質の濃度とゾル圧が比例関係にあるものとし、粘菌の前方、後方におけるゾル圧の時間変化を化学物質の反応拡散モデルから導出した。式 (2), (3) の第 1 項は拡散項、第 2 項は反応項に対応する。ここで r_v は化学物質が溶解している溶液の前方、後方の体積比を表しており、前後方で溶液の体積が異なる場合の拡散を考えていることに注意されたい。また、刺激がある場合を $h(t) = 1$ 、刺激がない場合を $h(t) = 0$ とし、刺激の有無で化学反応がスイッチする構造になっている。

各日ごとにキニーネ領域または通常領域のいずれかを決め、粘菌の先端の位置が領域の長さ L_r (図 1c の赤破線) に到達するまでの時間をシミュレーションした。シミュレーションの結果、(i), (ii), (iii) の特徴を再現できた (図 1a)。

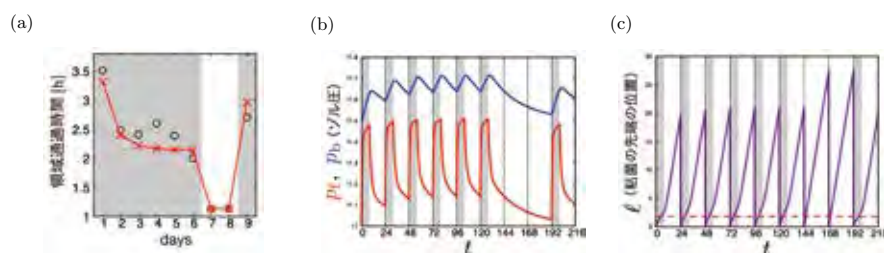


図 1: (a) 各日ごとの領域通過時間のシミュレーション結果. (赤バツ印: シミュレーション結果, 丸印: Boisseau et al. [4] の実験結果, 灰色: キニーネ領域を渡らせた日, 白色: 通常領域を渡らせた日). (b) p_f , p_b の時間変化. (赤実線: p_f の時間変化, 青実線: p_b の時間変化, 灰色: $h(t) = 1$, 白色: $h(t) = 0$). (c) ℓ の時間変化. 各日の始め ($t = 24n$) に, $\ell = 0$ としている. (赤破線: 領域の長さ L_r , 灰色: $h(t) = 1$, 白色: $h(t) = 0$).

キニーネ領域通過時間の減少, 回復 (i), (ii) は, 刺激の有無に応じて次の日のゾル圧の初期状態が変化することにより, 生じることがわかった。キニーネ領域を通過すると, 次の日のゾル圧の初期状態が等速度線 m の十分近くで右上に遷移することで, キニーネ領域上での減速が緩和される (図 2a)。そのため, キニーネ領域通過時間が減少する。通常領域を通過する場合には, 次の日のゾル圧の初期状態が等速度線 m の十分近くで左下に遷移するため, キニーネ領域通過時間が回復するのである (図 2b)。また, 通常領域の通過時間が一定となること (iii) は, 通常領域を通過する際に等速度線 m (図 2b の直線 m) に沿ってゾル圧が変化することが要因であることがわかった (図 2b)。このように等速度線は, (i), (ii), (iii) の特徴を再現する要になっている。等速度線は, 2 変数のゾル圧を 1 変数に圧縮して運動出力する粘菌の移動モデル式 (1) から得られた。つまり, 提案モデルにおいて内部状態の次元を圧縮して外部出力する構造が, 粘菌の馴化行動の核になっている。

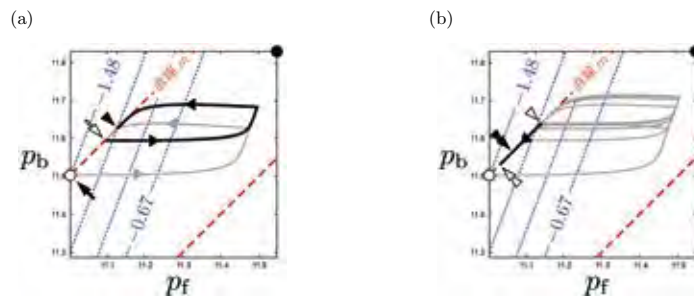


図 2: ゾル圧 (p_f, p_b) の相平面上的挙動. 赤破線: 等速度線 (直線上で移動速度が等しくなる), 青点線: 等加速度線 (直線上で $h(t) = 1$ のときの加速度が等しくなる). (a) 1, 2 日目にキニーネ領域を通過させた場合のゾル圧 (p_f, p_b) の相平面上的挙動. 灰色実線: 1 日目の軌道, 黒実線: 2 日目の軌道, 黒矢印: 1 日目のゾル圧の初期状態, 白矢印: 2 日目のゾル圧の初期状態, 黒二重矢印: 3 日目のゾル圧の初期状態. (b) 1 日目から 6 日目にキニーネ領域, 7, 8 日目に通常領域を通過させた場合のゾル圧 (p_f, p_b) の相平面上的挙動. 灰色実線: 1 日目から 6 日目の軌道, 黒実線: 7, 8 日目の軌道, 白矢印: 7 日目のゾル圧の初期状態, 黒二重矢印: 8 日目のゾル圧の初期状態, 白二重矢印: 9 日目のゾル圧の初期状態.

参考文献

- [1] Nakagaki, T., Yamada, H., and Tóth, Á.: Maze-solving by an amoeboid organism. *Nature* 407, 470 (2000)
- [2] Tero, A., Takagi, S., Saigusa, T., Ito, K., Bebber, D. P., Fricker, M. D., Yumiki, K., Kobayashi, R., and Nakagaki, T.: Rules for biologically inspired adaptive network design. *Science* 327, 439–442 (2010)
- [3] Saigusa, T., Tero, A., Nakagaki, T., and Kuramoto, Y.: Amoebae anticipate periodic events. *Physical review letters* 100, 018101 (2008)
- [4] Boisseau, R. P., Vogel, D., and Dussutour, A.: Habituation in non-neural organisms: evidence from slime moulds. *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences* 283, 20160446 (2016)
- [5] TAKAGI, S., NISHIURA, Y., NAKAGAKI, T., UEDA, T., and UEDA, K.-I.: *INDECISIVE BEHAVIOR OF AMOEBA CROSSING AN ENVIRONMENTAL BARRIER*, 86–93. World Scientific (2007)

IV 学生レポート 等

本プログラムにおける今後3年間の活動の方向と到達目標

西 康汰 (2MI23002T)

マス・フォア・イノベーション連係学府 数理学系

指導教員：手老 篤史 准教授，共創メンター：久保田 浩行 教授

令和6年度

1. 今後の研究方針と博士論文の展望

修士論文において、真正粘菌 *Physarum polycephalum* の変形体 (以下、粘菌) の馴化行動のメカニズムを数理モデルにより提案した。粘菌の移動速度を決定する1次元の運動モデルと、その移動速度を制御する2次元の内部状態の動的モデルで構成される数理モデルを構築した。この数理モデルを用いてシミュレーションを行った結果、Boisseau et al. [1] で報告されているキニーネ領域通過時間の減少・回復と通常領域の通過時間が一定となる特徴が再現できた。特に前者は馴化の特徴である反応減弱、自発的回復に対応している。

一方で、粘菌の平面的な広がり方にも馴化の特徴が見られることがわかっている [1]。そこで粘菌の平面上での運動を記述するために、すでに得られている運動モデルを2次元に拡張することを目指す。現在、フェーズフィールド法を用いて2次元の運動モデルの構築を試みている。また粘菌の平面的な広がり方には、馴化の特徴である反応減弱や自発的回復に加えて刺激特定性も見られる [1]。そこで内部状態の動的モデルを、刺激特定性が表現できるようにしたいと考えている。

また、得られた内部状態の動的モデルをもとに、化学物質の反応拡散に基づく様々な学習構造の構築を目指す。例えば、振動する内部状態の変数を導入することで周期刺激の記憶や異なるタイムスケールの内部状態の変数を導入することで短期・長期記憶が可能な内部状態の動的モデルの構築を行いたいと考えている。

2. 共創力強化インターンシップへの展望

現時点では、数理モデリングによる問題解決が実践できる大学、企業に行きたいと考えている。具体的なことは決めていないので、今後は異分野、産業での数理的な課題を調査し、計画を立てていきたいと思う。

3. 卓越大学院イベントに関する抱負

去年、一昨年とSGWに参加し、データ解析や数理モデリングを行った。データ解析の経験がほとんどなかったのに、企業から提供していただいたデータを用いてデータの前処理から解析まで行ったことは、大変良い経験になった。自身の視野を広げるためにも、今後も積極的に参加したいと考えている。

4. セミナー、研究集会への参加状況、研究発表状況

- PNU - Kyushu Young Researchers Workshop on Mathematics for Industry (九州大学, 口頭)
- Forum "Math-for-Industry" 2024 (マレーシア, ポスター)
- 異分野異業種交流会 2024 (東京科学大学, ポスター)
- 応用数学合同研究集会 2024 (龍谷大学, 口頭)

参考文献

- [1] Boisseau, R. P., Vogel, D., and Dussutour, A.: Habituation in non-neural organisms: evidence from slime moulds. *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences* 283, 20160446 (2016)

三苦 隆翔

Singularities of Arithmetic Curves:
Quadratic Fields

2MI23005P 三苦 隆翔

指導教員 翁 林

この論文では, 二次体の Order と呼ばれる環の特異点の形を求める.

K を代数体, O_K をその整数環, $\text{Spec}(O)$ を O の素イデアルの集合とする.

定義. (1) O_K の部分環で K の $\mathbb{Q}$ 上の基底を含むものを K の **Order(整環)** という.

(2) O を K の Order, $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(O)$ とする. $O_{\mathfrak{p}}$ が離散付値環であるとき,

$\mathfrak{p}$ は **正則 (非特異)** であるといい, 正則でないとき $\mathfrak{p}$ は **特異** であるという.

(3) $\tilde{O} = \{x \in K \mid x \text{ は } O \text{ 上整}\}$ を O の **正規化** という.

(4) $\mathfrak{f} = \{a \in \tilde{O} \mid a\tilde{O} \subset O\}$ を O の **導手** という.

命題. 二次体 $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ の指数 f の Order O は次の形である.

$$O = \mathbb{Z} + fO_K = \mathbb{Z}[fw_K].$$

ここで, $w_K = \frac{d_K + \sqrt{d_K}}{2}$, ($d_K : K$ の判別式).

命題. 二次体において次が成り立つ.

$$\mathfrak{f} = (f) = fO_K$$

命題 (判別法). $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(O)$ に対して, $\mathfrak{p}\tilde{O} = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{e_r}$, ($\mathfrak{p}_i \in \text{Spec}(\tilde{O})$) と書けるとする.

次は同値

(1) $\mathfrak{p}$ は特異点.

(2) $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}$.

(3) $r = 1, e_1 = 1, f_1 = [\tilde{O}/\mathfrak{p}_1 : O/\mathfrak{p}] = 1$.

主定理. 二次体 $K = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ の指数 m の Order $\mathbb{Z}[m\sqrt{d}]$ ($d \equiv 2, 3 \pmod{4}$),

$\mathbb{Z}[m\theta]$ ($d \equiv 1 \pmod{4}, \theta = \frac{-1+\sqrt{d}}{2}$) の特異点はそれぞれ次の形のもののみである.

$$(p, m\sqrt{d}), (p, m\theta).$$

ただし, p は m を割る素数.

IV 学生レポート 等

参考文献

- [1] Jorgen Neukirch, *Algebraic Number Theory*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 322, 1999, Springer.
- [2] David A. Cox, *Primes of the form $x^2 + ny^2$; Fermat, Class Field Theory, and Complex Multiplication*, Second Edition, Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts, 2013, Wiley.
- [3] M.F.Atiyah, I.G.MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Series in Mathematics, 1994, CRC Press.

本プログラムにおける今後3年間の活動の方向と到達目標

三苫 隆翔 (2MI23005P)

マス・フォア・イノベーション連係学府 数理学系

指導教員：翁 林，共創メンター：池田 達紀

令和6年度

● 今後の研究方針と博士論文の展望

(数学) 修士論文では二次体における特異点の形を特定したが、一般の代数体への拡張を目指す。また、モジュライ空間の安定性やコホモロジーに関する解析を進める。Harder らの論文において、 $SL_3(\mathbb{Z})$ (A_2 型)の境界コホモロジー、アイゼンシュタインコホモロジーに関する成果を出発点とし、より一般の古典型リー群、特に G_2 のコホモロジーの解明を目指す。また、 p 進ガロア表現の学習を深め、非可換類体論の基盤構築を目指す。これらの研究成果を体系化し、さらなる発展を加えたものを博士論文としてまとめることを目標としている。

(創発モデリング) 修士課程では、線形回帰分析を用いて気象データから地震波速度の変化を予測する研究を行った。今後はさらなる精度向上を目指し、データ量の拡充や新たな解析手法の導入を計画している。また、何日前の気象データが地震波速度変化に最も影響を与えるかを特定することで、地域ごとの地盤の浸水度を評価し、災害リスクの指標として活用できる可能性を探る予定である。これらの成果を総合し、博士論文としてまとめることを目標としている。

● 共創力強化インターンシップへの展望。

海外の大学への訪問を考えているが、まだ具体的な計画は決まっていない。翁先生と相談しながら詳細を決めていきたいと考えている。

● 卓越大学院イベントに関する抱負。

イベントに対する参加が現状では少ないため、今後は積極的に参加し、様々な人との交流を深めることを目指していく。

● セミナー、研究会への参加状況、研究発表状況

セミナーや研究会への参加は現時点では積極的には行なっておらず、研究発表の経験もまだない。

● その他の関連する活動（卓越社会人博士課程制度、など）

修士論文要旨

村上 真悟 (2MI23008G)

マス・フォア・イノベーション連係学府 数理学系

指導教員：鍛冶 静雄教授

令和6年度

1 修士論文の概要

修士論文は、法学における因果関係の概念を数学的にモデリングすることをテーマとしており、全部で6章からなる。第1章と第2章が数学的内容について扱う第I部、第3章から第6章までが法的内容について扱う第II部である。

第I部は、主に必要な数学的理論についてのレビューからなる。第1章では Pearl の統計的因果推論について、介入と反事実の概念を解説した。第2章では Halpern の理論を中心に、法学に有益と思われる他の数理理論の理論について解説し、筆者の独自の成果も示している。

第II部は、第I部で解説した数学的理論を用いて、法学における因果関係の概念や、その立証の方法について数学的なモデルを与えることを試みた。第3章は、考察とする対象である「因果関係」という概念の定義や、関連する法的概念について概説した。第4章は、行為と結果との事実的な結びつきを数理理論学によって記述する方法について、複数の先行研究を比較検討した上で、ふさわしいと思われるモデルについて私見を述べた。第5章では、法的評価を加えて因果関係の存否を判断するプロセスについて、第I部で解説した数学的理論によるモデリングの限界について論じた。第6章では、訴訟での因果関係の立証について、統計的因果推論の理論を用いて、あるべき事実認定のプロセスについて論じた。

2 成果

2.1 異なるモデルの対応関係の証明

法学研究という動機に基づいて数理モデル相互の関係性を明らかにすることで、法学以外にも波及が期待される成果を得た。着目した2つのモデルは、いずれも因果関係の記述を目的として考案されたものであるが、それぞれ背景にある思想が異なる。

Halpern の因果モデル [1] は、**介入主義**という、近年の哲学において有力視されている立場に基づくものである。Turing 賞受賞者である Pearl の統計的因果推論も、この介入主義に位置付けられるが、こちらは原因と結果の一般的な関係（一般因果）を統計的手法に基づき明らかにすることを目的とする。Halpern は、Pearl との共同研究により、一般因果を対象とする Pearl のモデルを、単称因果を記述するためのモデルとして再構成した。

Sato & Tojo のアブダクション枠組み [2] は、**信念変更**という、情報を追加することで信念を変更していくプロセスを背景に考案されている。信念変更は、情報が不確かな状態で得られた暫定的な結論を、新たな情報によって書き換えていくという人間の推論プロセスをモデル化したものとして、論理学や哲学、人工知能分野で研究されている。

本研究の結果は、前者のモデルを後者のモデルで記述可能であるというものである。Halpern のモデルは、様々な事例を記述可能な柔軟なモデルとしての強みがある一方で、推論の前提となる情報が全て確定しているという仮定が置かれている。このモデルを Sato & Tojo のモデルで記述することで、情報が不確定な場合における推論も可能となり、Halpern の因果モデルの記述力がさらに向上することが期待される。本研究は、法学的な動機に基づくものではあるが、介入主義も信念変更も法学に特有の思想というわけではない。そのため、得られた成果は法学に限定されるものではなく、因果についての人間の思考プロセスを明らかにしようとする試み一般に当てはまりうるものと考ええる。

2.2 Halpern モデルの法学への応用可能性の検討

日本の法学における具体的な議論状況を踏まえ、Halpern の抽象的な数理モデルの応用可能性を検討した。Halpern の因果モデルは、法学のみを対象としたものではなく、かなりの抽象性をもっている。また、ドイツやフランスの影響を強く受ける日本法は、アメリカ法（英米法）とは大きく異なる体系をもつ。そのため、アメリカ人である Halpern のモデルが日本法に適用可能であるかどうかは全く自明ではない。

Halpern の理論を法学に応用しようとする先行研究として、山本展彰 [3] によるものがある。しかし、山本の研究は、Halpern の数理モデルに対する誤解に基づいており、これを自然言語で書き直す過程において、Halpern の提案した本来のモデルや定義とのずれが生じている。本研究では、山本論文の誤りを指摘した上で、Halpern や山本の理論が日本の法学におけるどのような議論に対応しているのかを検討し、双方に限界があることを示した。続いて、Wright の NESS[4] という英米法由来の基準を Halpern のモデルで記述した Beckers の研究 [5] に着目し、これが日本法において近年有力視されている学説からも支持できることを示した。さらに、過失や不作為犯のように、従来の日本の法学において因果関係の問題として扱われてこなかった問題についても、Halpern の理論を用いてモデル化できることを示した。

2.3 法実務における因果関係立証の問題点の指摘と、改善方法の提案

数理モデルを用いて日本の裁判例・学説の抱える論理的なギャップを指摘し、現実的と思われる改善案を提案した。

本研究では、公害訴訟や薬害訴訟において因果関係の判断基準として参照されるべき指標は、Pearl の「必要性の確率」[6] であるとの結論を得た。しかし、これは実務で採用されている指標（寄与危険割合）[7] とは異なる。また、学説においても、実務が採用している寄与危険割合を「因果関係の成立する確率」と解釈しているものが複数みられる [8, 9]。本研究では、法理論的に証明の対象とされるべき必要性の確率と、実際に重要視されている寄与危険割合が、場合によっては全く異なる値をとりうることを示すことで、寄与危険割合の大小によって因果関係の有無を判断しようとする実務の判断プロセスに論理的なギャップがあることを指摘した。

そのうえで、本研究は、実務において採用しうる判断プロセスを改善案として提案している。1 つは、寄与危険割合が必要性の確率と一致するための十分条件を示し、当該十分条件が満たされているかどうかの確認を行うことを前提に、寄与危険割合によって因果関係を判断するというものである。これは、実務において現在採用されている判断枠組みに寄せた改善案である。もう 1 つの改善案は、必要性の確率が一般にはデータから求められないことを前提に、必要性の確率の存在範囲を不等式で与え、判断の一助とするというものである。これは、ベイズ意思決定論に基礎をおく太田勝造の理論 [10] を、因果関係という具体的文脈で精緻化したという意味で、理論的な意義をも有する改善案である。

References

- [1] Joseph Y. Halpern. *Actual Causality*. MIT Press, 2019.
- [2] Ken Satoh and Satoshi Tojo. Disjunction of Causes and Disjunctive Cause: A Solution to the Paradox of *Conditio Sine Qua Non* using Minimal Abduction. In *Legal Knowledge and Information Systems: JURIX 2006: The Nineteenth Annual Conference*, 2006.
- [3] 山本展彰. 介入主義を応用した法的因果関係論の構想. 阪大法学, Vol. 72, No. 6, pp. 136–98, 2023.
- [4] Richard W Wright. Causation in tort law. Vol. 73, p. 1735, 1985.
- [5] Sander Beckers. The counterfactual NESS definition of causation. In *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, Vol. 35, pp. 6210–6217.
- [6] Judea Pearl. Probabilities of causation: Three counterfactual interpretations and their identification. *Synthese*, Vol. 121, No. 1, pp. 93–149, 1999.
- [7] 河村浩. 公害環境紛争処理の理論と実務 (4)(裁定書研究会) 第四 原因裁定・責任裁定手続と要件事実認定論—因果関係を中心として. 判例タイムズ, Vol. 58, No. 20, pp. 40–64, 2007.
- [8] 新美育文. 疫学的手法による因果関係の証明-下-. ジュリスト, No. 871, pp. p89–94, 1986.
- [9] 太田勝造. 法律. 社会科学の理論とモデル. 東京大学出版会, 2000.
- [10] 太田勝造. 裁判における証明論の基礎：事実認定と証明責任のベイズ論的再構成. 弘文堂, 1982.

IV 学生レポート 等

本プログラムにおける今後3年間の活動の方向と到達目標

村上 真悟 (2MI23008G)

マス・フォア・イノベーション連係学府 数理学系

指導教員：鍛冶 静雄教授，共創メンター：寺本 振透教授

令和6年度

1 今後の研究方針と博士論文の展望

修士論文に引き続き、法学における因果関係概念の数学的モデリングに取り組む。修士論文では主に事実の因果関係の定式化と立証方法について分析を行った。博士論文では、修士論文で十分に検討できなかった以下のテーマに取り組む。

1. 事実関係が十分に明らかなでない場合の推論過程のモデリング
Halpern のモデルを Satoh らのモデルで記述できるという修士論文の成果を発展させることで、訴訟における判断プロセスを含めたモデリングを試みる。
2. 規範的な判断を数理モデルに組み込む方法の検討
Halpern の通常性や、様相論理の利用により、確率の問題として単純に処理できない規範的判断に対し数学的なモデルを与えることを試みる。
3. 損害の金銭的評価
修士論文で扱わなかった、連続型確率変数によるモデルの活用を試みる。
4. 共犯や共同不法行為など、より複雑な事例のモデリング
Pearl や Halpern の研究成果を参照することで、共同不法行為における寄与度の概念など、法実務や学説においても議論が不十分であった論点について客観的な判断指標を与えることを試みる。

2 共創力強化インターンシップへの展望

産学または異分野で、法学分野でのインターンシップを行いたい。産学の場合は、法律事務所や企業法務部門など、法実務に係る組織での経験を積みたい。異分野の場合は、他大学の法学研究科等で、理論的な研究に取り組む。

3 卓越大学院イベントに関する抱負

様々な分野の研究者と交流を深め、新たな研究の着想を得るべく、卓越大学院に関するイベントは可能な限り参加してきた。博士後期課程でも、機会が許す限り積極的に参加したい。

4 セミナー、研究集会への参加状況、研究発表状況

週に1回、3時間のセミナーでは、その時点での研究の進捗を報告し、指導教員である鍛冶先生から助言を頂いたり、他の学生と意見交換を行ったりしている。外部の研究者から意見を得るべく、機会を探して積極的に発表を行うように心がけているが、自分の研究分野（数理法務）を直接的に扱っている集会がなく、適切な発表の場を見つけることに苦労している状態である。

室屋 秀平

修士論文要旨

室屋 秀平 (2MI23007Y)

マス・フォア・イノベーション連係学府 数理学系

指導教員：廣瀬 慧，共創メンター：劉 維

令和6年度

1 問題背景

高次元のデータ解析で用いられる手法である lasso (least absolute shrinkage and selection operator) (Tibshirani, 1996) は、パラメータ推定の際に絶対値制約、すなわち l_1 ノルムに基づく制約を加えることで、いくつかのパラメータを 0 と推定できる。本研究では、線形回帰モデルの枠組みで lasso を考える。

$$\underset{\beta}{\text{minimize}} \quad R_{\lambda}(\beta) = \frac{1}{2N} \|y - X\beta\|_2^2 + \lambda \|\beta\|_1 \quad (1)$$

この枠組みにおいて、ある説明変数が予測に影響を及ぼすかどうかを、その説明変数に対応するパラメータが 0 でないかで判断でき、モデルの解釈が容易になるという利点がある。このような利点や、高次元や低サンプルサイズでも計算可能なことにより、lasso は様々なデータ解析で用いられている。例えば、遺伝子データの解析に応用されており、lasso を用いて数多くの遺伝子の中から、癌の発症に影響を与える少数の遺伝子を特定することができる (Hastie et al., 2015)。さらに、Candès and Wakin (2008) では、圧縮センシングという画像の復元に応用している。他にも lasso は線形回帰モデルだけでなく、さまざまな統計モデルに応用されている。例えば、Gui and Li (2005) は、lasso を Cox 回帰に応用し、高次元・低サンプルサイズであるマイクロアレイデータの解析を行った。他にも、精度行列におけるスパース推定手法である graphical lasso (Friedman et al., 2008) が挙げられる。この計算アルゴリズムにおいて、lasso のアルゴリズムが組み込まれている。なお、このようなモデル選択は、 l_0 制約付の問題を考えることでも可能であるが、 l_0 制約付の問題は全ての説明変数の組み合わせを計算する必要があるため計算時間がかかる。 l_0 制約付の問題と比較して lasso は高速に解くことができるという利点がある。

lasso 解の計算には、微分不可能である絶対値制約が含まれる最適化が必要となるため、解析的な lasso 解を求めることが難しい。そのため、lasso 解を計算するために様々な最適化アルゴリズムが提案されている。例えば、精確な解のパスを求める LARS (Least Angle Regression) アルゴリズム (Efron et al., 2004) や、近似的な解のパスを計算する座標降下法を用いたアルゴリズム (Friedman et al., 2010) がある。統計解析のプログラミング言語として広く用いられている R において、LARS は lars、座標降下法は glmnet (Elastic net model paths for some generalized linear models) というパッケージで実装されている。どちらも同じ最適化問題を解くアルゴリズムであるが、それぞれに特徴がある。lars は精確だが計算時間が比較的長い。一方 glmnet は精確ではなく近似的な解を求めるが、計算時間が比較的短い。特に、glmnet は計算の速度が高速であることから、lasso のパッケージとして広く用いられている。二つのパッケージの 2024 年におけるパッケージダウンロード数を比較すると、lars の 12,0840 に対して、glmnet は 134,9785 と、10 倍以上の差があることがわかる。

そのような glmnet が lars の計算結果と一致せず、精度が悪くなる状況があることを数値実験で確認した (表 1)。このとき、データはサンプルサイズ 5000、説明変数の数 3900 の状況である。

IV 学生レポート 等

R パッケージ	テスト誤差 (RMSE)	計算時間 [s]
lars	1.51	4440
glmnet (設定値: デフォルト)	64.15	44
glmnet (設定値: 修正後)	1.58	884

表 1: 数値実験結果

この現象は、glmnet の計算を動かす前に決める設定値がデフォルトの値では、十分に収束しないために生じたことがわかった。実際、glmnet の設定値を見直したところ、精度の改善が実現できた。つまり、glmnet は、適切に設定値を設定することで、速く正確な計算が可能になるため、適切な設定値選択が必要であるということがわかった。

glmnet の適切な設定値は問題設定ごとに異なる上、陽に導出できない。そのため、適切な設定値選択のためには、さまざまな設定値を試行錯誤する必要がある。設定値の探索法として、網羅的に評価するグリッドサーチが考えられるが、特に複数の設定値が存在する場合、膨大な組合せを探索することが求められる。この場合、最適化が実用上困難であり、時間的な効率も良くない。そこで本研究では、大量の人工データを生成し、ニューラルネットワークを活用して設定値と計算時間、glmnet の精度の関係をモデル化することによって、精度良く、効率的に適切な設定値をデータから自動的に予測する新しい方法を提案する。さらに、この手法を実行する R パッケージ `assg` を作成し、GitHub で公開した。本パッケージにより、ユーザーが簡単に設定値選択を行うことが可能となる。

データから適切な設定値の自動的な選択が実現すれば、全ての glmnet ユーザーは簡単に適切な設定値を与えることが可能となる。世界中で広く使われている glmnet において、適切な設定値を与える方法を提案することで、多くのユーザーの利便性を高めることができる。また、不適切な設定値による解析結果の悪化を防ぐことで解析結果が安定し、得られた結果の信頼性も向上させることが期待される。

2 提案手法における設定値選択の流れ

この章では、データから設定値選択を行う大まかな流れを示す。設定値選択の流れを図 1 に示した。設定値選択のインプットとして、データと所望の解析時間 $T_{hope}[s]$ を用意する。このインプットから適切な設定値選択を自動で行う。まずはじめに、lars か glmnet のどちらのパッケージを用いるかの検討を行う。この検討を行う理由は、lars は正確であることから、計算時間に問題がなければ lars を用いる方が精度の観点で良いためである。検討方法は、データから lars にかかる計算時間 (T_{lars}) を予測し、それが所望の計算時間を超えるかどうかで判断する。lars の計算時間が所望の解析時間を超える場合、glmnet で解析し、glmnet の設定値選択へとうつる。以上が glmnet の設定値選択の流れとなる。



図 1: 設定値選択の流れ

3 数値実験結果

実際にサンプルサイズ 1500、説明変数の数 800 のデータに対して、lars と glmnet を計算した結果が表 2 である。この表から、自動で設定値選択を行った glmnet は、計算時間は lars よりも早く、テスト誤差は lars に近い結果となっていることがわかる。また、今回の設定値の選択にかかった時間は 1.1 秒ほどであった。この時間を加味しても、設定値選択を行なった glmnet は lars よりも速い計算時間で計算できている。

R パッケージ	テスト誤差 (RMSE)	計算時間 [s]
lars	1.244055	90
glmnet (設定値：デフォルト)	2.153446	1.1
glmnet (設定値：自動選択)	1.223052	6.8

表 2: 数値実験結果

参考文献

E. J. Candès and M. B. Wakin. An introduction to compressive sampling. *IEEE signal processing magazine*, 25(2):21–30, 2008.

J. Chen and Z. Chen. Extended bayesian information criteria for model selection with large model spaces. *Biometrika*, 95(3):759–771, 2008.

B. Efron, T. Hastie, I. Johnstone, and R. Tibshirani. Least angle regression. *The Annals of Statistics*, 32(2):407–499, 2004.

J. Friedman, T. Hastie, and R. Tibshirani. Sparse inverse covariance estimation with the graphical lasso. *Biostatistics*, 9(3):432–441, 2008.

J. H. Friedman, T. Hastie, and R. Tibshirani. Regularization Paths for Generalized Linear Models via Coordinate Descent. *Journal of Statistical Software*, 33:1–22, 2010.

J. Gui and H. Li. Penalized cox regression analysis in the high-dimensional and low-sample size settings, with applications to microarray gene expression data. *Bioinformatics*, 21(13):3001–3008, 2005.

T. Hastie, R. Tibshirani, and M. Wainwright. *Statistical Learning with Sparsity*. Chapman and Hall/CRC, 2015.

M. Stone. Cross-Validatory Choice and Assessment of Statistical Predictions. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 36(2):111–147, 1974.

R. Tibshirani. Regression Shrinkage and Selection Via the Lasso. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 58(1):267–288, 1996.

IV 学生レポート 等

本プログラムにおける今後 3 年間の活動の方向と到達目標

室屋 秀平 (2MI23007Y)

マス・フォア・イノベーション連係学府 数理学系

指導教員：廣瀬 慧，共創メンター：劉 維

令和 6 年度

1. 今後の研究方針と博士論文の展望

今後の研究については、修士論文で得られた知見を基に、さらなる発展を目指した研究を進める。以下に、主要な方向性を 2 点述べる。

1. 修士論文の拡張と他手法への適用

まず、修士論文で使用した glmnet 手法を一般化線型モデル (GLM) に適用する方向で拡張を行う。この拡張により、提案手法の適用可能なモデル範囲を広げ、その有効性をさらに検証する。また、glmnet で得られたノウハウを基に、他のハイパーパラメータの選択が必要な手法への応用も検討している。

2. Equation Discovery に関する研究

もう一つの方向性として、Equation Discovery というデータを表す方程式の機械学習手法に関する研究を行いたいと考えている。Equation Discovery は、単にモデルパラメータを推定するだけでなく、モデル構造とパラメータを同時に推定する手法である。この手法を共創開発モデリングにおけるデータ解析に用いたいと考えている。さらに、手法を統計的なアプローチから理論的な研究も行いたいと考えている。

2. 共創力強化インターンシップへの展望

現時点では産学を希望しており、国内の企業あるいは、研究機関へのインターンシップを希望している。企業では、製薬会社などの実務で統計的な知識を活用するような企業のインターンシップを希望する。研究所では、国内の研究機関である統計数理研究所を希望している。

3. 卓越大学院イベントに関する抱負

スタディグループワークショップでは、博士前期課程 1 年次には学生モデレータとして参加した。また、博士前期課程 2 年次にも参加し、最終発表にて成果物の発表も行った。いずれも、専門である統計的なアプローチから問題に取り組んだ。実データの解析に取り組むことで、理論とのギャップや実装における難しさを体感した。博士後期課程では、これまでの経験を活かし、統計的なアプローチを行う課題では、グループを牽引して、実りのある解析ができるように取り組みたい。

4. セミナー、研究会への参加状況、研究発表状況

博士前期課程において、3 回研究発表を行った。詳細は以下の通りである。

- glmnet での正確な解を高速に求めるための設定値の学習, 第 18 回日本統計学会春季集会, ポスター, 成城大学 (東京), 2024.03
- glmnet での正確な解を高速に求めるための設定値選択の自動化, 2024 年度統計関連学会連合大会, 口頭発表, 東京理科大学 (東京), 2024.09

- Learning appropriate setting values for "glmnet" package, Forum of Mathematics for Industry (FMFI 2024) and ISMI (2024), poster, Universiti Teknologi Malaysia (Malaysia), 2024.09

修士論文要旨

2MI23004W 山本 侑希

2025 年 2 月 7 日

修士論文では、変数係数ネルソンモデルに対する基底状態 Ψ_g の空間減衰を評価した。変数係数ネルソンモデルが定義される空間は

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes L^2(\mathcal{Q}),$$

である。 H_p を

$$H_p = -\frac{1}{2} \sum_{1 \leq j, k \leq 3} \partial_j A_{jk}(x) \partial_k + V,$$

と定義し、 ω を

$$\omega = \sqrt{-\sum_{1 \leq j, k \leq 3} c(x)^{-1} \partial_j a_{jk}(x) \partial_k c(x)^{-1} + m(x)^2},$$

と定義する。

Assumption 1 (Cutoff function). $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ に対し、 $\hat{\varphi} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$, $\overline{\hat{\varphi}(k)} = \hat{\varphi}(-k)$, $\hat{\omega}^{-1/2} \hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^3)$, $\hat{\omega}^{-1} \hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ が成り立つと仮定する。

この φ を用いて $\tilde{\varphi} := (\hat{\omega}^{-1/2} \hat{\varphi})$ と定義し、さらに $\tilde{\varphi}$ を用いて H_I を以下のように定義する。

$$H_I := \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} \phi(\tilde{\varphi}(\cdot - x)) \, dx.$$

以上の準備を踏まえ変数係数ネルソンモデルの Hamiltonian H_N を以下のように定義する。

$$H_N = H_p \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes d\Gamma(\omega) + H_I.$$

この Hamiltonian に関する基底状態の存在、非存在に関する研究は既に行なわれている。 [1], [2], [3].

以降 Ψ_g は H_N に対する基底状態と仮定する。すなわち $H_N \Psi_g = E_g \Psi_g$ が成り立つとする。ここで $E_g = \inf \text{Spec}(H_N)$ である。

次に、 H_p に対応する確率過程を定義する。 H_p の係数行列 A を用いて行列 σ とベクトル b をそれぞれ

$$\sigma(x) := \sqrt{A(x)},$$

$$b(x) := \begin{pmatrix} b^1(x) \\ b^2(x) \\ b^3(x) \end{pmatrix}, \quad b^j(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 (\partial_k A_{jk})(x), \quad j = 1, 2, 3.$$

と定義する。これらを用いて確率微分方程式

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s + \int_0^t b(X_s) ds.$$

を考え, X_t^x をこの確率微分方程式の解とする.

次に, H_p に表れていたポテンシャル V に対して, Kato class と呼ばれる関数の集合を

$$\lim_{t \downarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}^0 \left[\int_0^t |V(X_s^x)| ds \right] = 0.$$

が成り立つような関数 V の集合と定め $\mathcal{K}(\mathbb{R}^3)$ と書くことにする. また, local Kato class と呼ばれる関数の集合を

$$\mathcal{K}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3) := \{V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \mid \mathbb{1}_K V \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^3) \text{ for any compact set } K \subset \mathbb{R}^3\}$$

と定義する.

以上を踏まえ, Hamiltonian H_N に対する Feynman-Kac formula を紹介する.

Theorem 2. 任意の $t \geq 0$, $F, G \in \mathcal{H}$ に対し

$$(F, e^{-tH_N} G)_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{E}^0 \left[e^{-\int_0^t V(X_s^x) ds} (F(X_0^x), J[0, t] G(X_t^x))_{L^2(\mathcal{Q}_{\mathbb{E}})} \right] dx.$$

が成り立つ.

$j_t : L^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^4)$ は $j_t^* j_s = e^{-|t-s|\omega}$ を満たすような作用素とする. また, J_t は $J_t := \Gamma(j_t)$ により定義され $J_t^* J_s = e^{-|t-s|H_t}$ が成り立つような作用素である. このとき, Feynman-Kac Formula に現れる作用素 $J[0, t]$ は以下のように定義される.

$$J[0, t] := J_0^* e^{-\phi_E(\int_0^t j_s \tilde{\varphi}(-X_s^x) ds)} J_t.$$

ここからは基底状態の空間減衰の upper bound に関する研究結果を紹介する. Upper bound を求める際の議論は [4] を参考にした.

Theorem 3. $0 \leq V \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$ とする. このとき任意の $a > 0$, $0 < \alpha < 1/2$, $t < \delta(a)$ に対し, 定数 $D_1, D_2 > 0$ が存在して次が成り立つ.

$$\|\Psi_g(x)\|_{L^2(\mathcal{Q})} \leq t^{-3/4} D_1 e^{\tilde{E}t} (D_2 e^{-\frac{\alpha a^2 b_2}{8t^2}} e^{-tV_{\infty}} + e^{-tV_a(x)}) \|\Psi_g\|_{\mathcal{H}}.$$

ここで $\tilde{E} = E_g + E(\hat{\varphi})$, $V_a(x) = \inf\{V(y) \mid |x - y| < a\}$, $V_{\infty} = \inf_{x \in \mathbb{R}^3} V(x)$ である.

Corollary 4. $0 \leq V \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^3)$ とする. また, ある定数 $n > 1$, $K > 0$, $\gamma > 0$ が存在して $B_K(0)$ の外側で $\gamma|x|^{2n} \leq V(x)$ という評価が成り立つとする. このときある正定数 $C_1, C_2 > 0$ が存在して

$$\|\Psi_g(x)\|_{L^2(\mathcal{Q})} \leq C_1 e^{-C_2|x|^{n+1}}$$

が成り立つ.

上の Theorem 3. と Corollary 4. が基底状態の空間減衰に関する upper bound の評価である. ここからは lower bound の評価に関する結果を説明する. Lower bound を求める際の議論は [5] を参考にした.

二つの曲線のクラス $\mathcal{C}^*$, $\mathcal{C}$ を以下のように定義する.

$$\mathcal{C}^* := \{q \in C^1([0, T]; \mathbb{R}^3) \mid q(0) = x, q(T) = 0\},$$

$$\mathcal{C} := \{\gamma \in C^1([0, T]; \mathbb{R}^3) \mid \gamma(0) = 0, \gamma(T) = x\}.$$

IV 学生レポート 等

Lemma 5. 任意の $x \in \mathbb{R}^3$ に対して $\sigma(x)$ は正則であると仮定する. また, 正定数 $M_1, M_2 > 0$ が存在し任意の $x \in \mathbb{R}^3$ に対し $|\sigma(x)| \leq M_1, |b(x)| \leq M_2$ が成り立つと仮定する. このとき任意の $T < \frac{1}{M_1^2}$ と $q \in \mathcal{C}^*, 0 \leq V \in \mathcal{K}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ に対してある定数 $C = C(T) > 0$ が存在し

$$\|\Psi_g(x)\|_{L^2(\mathcal{Q})} \geq C \exp \left\{ - \int_0^T \left(V_{\text{sup}}(q(t)) + \frac{2}{\Lambda_1(1-M_1^2 T)} |\dot{q}(t)|^2 \right) dt \right\}.$$

が成り立つ. ここで V_{sup} は $V_{\text{sup}}(x) := \sup_{|y-x| \leq 1} V(y)$ により定義される関数である.

Lemma 5. を踏まえ, 定数 Δ_T を $\Delta_T := \frac{4}{\Lambda_1(1-M_1^2 T)}$ と定義する. またこの定数を用いて二つの関数 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{L}$ を以下のように定義する.

$$\mathcal{A}(q, T) := \int_0^T \left(V_{\text{sup}}(q(t)) + \frac{1}{2} \Delta_T |\dot{q}(t)|^2 \right) dt, \quad q \in \mathcal{C}^*,$$

$$\mathcal{L}(\gamma, T) := \sqrt{\Delta_T} \int_0^T \sqrt{2V_{\text{sup}}(\gamma(t))} |\dot{\gamma}(t)| dt, \quad \gamma \in \mathcal{C}.$$

Theorem 6. 任意の $\gamma \in \mathcal{C}, 0 \leq V \in \mathcal{K}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ に対し, ある正定数 C が存在し

$$\|\Psi_g(x)\|_{L^2(\mathcal{Q})} \geq C \exp \left\{ - \sqrt{\Delta_T} \int_0^T \sqrt{2V_{\text{sup}}(\gamma(t))} |\dot{\gamma}(t)| dt \right\} = C e^{-\mathcal{L}(\gamma, T)}.$$

が成り立つ.

Corollary 7. ポテンシャル $0 \leq V \in \mathcal{K}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ に対しある定数 $n > 1, K > 0, \gamma > 0$ が存在して $B_K(0)$ の外側で $V(x) \leq \gamma|x|^{2n}$ という評価が成り立つとする. このとき, ある正定数 C_3, C_4 が存在して

$$\|\Psi_g(x)\|_{L^2(\mathcal{Q})} \geq C_3 e^{-C_4|x|^{n+1}}.$$

が成り立つ.

参考文献

- [1] Hiroshima F. Sasaki I. Spohn H. Suzuki, A. Enhanced binding in quantum field theory. *COE Lecture Note*, Vol. 38, , 2012.
- [2] Hiroshima F. Panati A. Suzuki A. Gérard, C. Infrared problem for the nelson model on static space-times. *Communications in mathematical physics*, Vol. 308, pp. 543–566, 2011.
- [3] Hiroshima F. Panati A. Suzuki A. Gérard, C. Infrared divergence of a scalar quantum field model on a pseudo riemannian manifold. *Interdisciplinary Information Sciences*, Vol. 15, No. 3, pp. 399–421, 2009.
- [4] René Carmona. Pointwise bounds for schrödinger eigenstates. *Communications in Mathematical Physics*, Vol. 62, pp. 97–106, 1978.
- [5] R Carmona and B Simon. Pointwise bounds on eigenfunctions and wave packets in n-body quantum systems: V. lower bounds and path integrals. *Communications in Mathematical Physics*, Vol. 80, pp. 59–98, 1981.

本プログラムにおける今後3年間の活動の方向と到達目標

山本侑希 (2MI23004W)

マス・フォア・イノベーション連係学府 数理学系

指導教員：廣島 文生, 共創メンター: 廣川 真男

令和6年度

今後3年間では博士前期課程で行なった研究である Feynman-Kac formula を用いた場の量子論の解析をより進めていきたいと考えている。現在は Nelson model に対する研究に取り組んでいるが今後は研究対象を増やしより多くのモデル、より様々な問題に関する研究を行いたい。具体的には Pauli-Fierz model や Polaron model を研究すること、また、より一般化されたモデルに関する研究を行うことを視野に入れている。さらに、多様体上に Nelson model を拡張することに関しても興味を持っている。上記の内容に関する研究を進め、その結果を博士論文として提出する予定である。Feynman-Kac formula を研究手法として使用するために確率論に関する多くの知識を会得する必要がある、また得られるであろう結果の予測や得られた定理の妥当性を議論するために物理的な知識を身につけることも重要であると考え。基本的には数学的な場の量子論の研究を進め、必要に応じて他分野の知識を補うという研究姿勢を取る予定である。

数学創発モデリングでは数学共創モデリングで取り組んだ内容である、カルマンフィルタを用いた暗号化-復元システムに関する研究を引き続き行う。特に音声データへのシステムの応用に関する研究を行う予定であり、画像データへのシステムの応用の際に行った分析と同様にシステムのパラメータが暗号化-復元にどのように影響しているのかに関して考察を行いたいと考えている。また、音声データの特徴である振幅や周波数に注目し、画像データやデジタルデータに対するシステムの応用との違いに関しても考察を行いたい。さらに、ニューラルネットワークを用いたシステムへの攻撃に関する研究も行う予定である。特に、システムの防御と過学習の関係について考察したいと考えている。具体的な活動時期としては博士後期課程1年前期を予定している。

共創力強化インターンシップは産学もしくは国際を希望しているが明確には決まっていない。産学を選択した場合は企業にて機械学習に関係する業務に取り組みたいと考えている。また、国際を選択した場合は海外大学で研究を行いたいと考えている。具体的な活動時期としては博士後期課程1年後期を予定している。

研究集会の参加状況について、博士前期課程一年のときに bonn 大学で開催された研究集会”Recent Advances in Quantum and Statistical Mechanics”を聴講したことが印象に残っている。海外で行われる学会に参加することは初めてであったため、非常に有意義な体験となった。特に、自分と同じ研究分野を研究している海外の学生の存在を知ることができたのは良い経験であった。また、京都大学数理学研究所にて行われている「量子場の数理とその周辺」という研究集会を毎年聴講しており、自分の研究の進捗度を確認したり最新の研究結果を知る場として非常に役に立っている。今後もこの研究集会に参加し新たな知見を得るとともに積極的に学外の研究者とコミュニケーションを図りたいと考えている。

論文要旨：機械学習を用いたアノマリー検知による非定常エラーに耐性のある表面符号のデコーダーの開発

日隈 俊秀 (2MI23103S)

マス・フォア・イノベーション連係学府 システム情報科学系

指導教員：廣川 真男

令和6年度

実用的な量子計算を実行するためには、量子誤り訂正符号を実装する必要があり、代表的なものとして表面符号がある。表面符号におけるデコードは換言すると、補助量子ビットの測定結果（シンδροーム）から、一意には定まらないデータ量子ビットに生じるエラーの発生箇所を推定するタスクである。しかし、その最尤推定は NP 困難であり、機械学習をはじめとするヒューリスティックな手法が多数提案されている。このエラーの推定時に、事前に測定した物理ビット毎のエラー率を定常的なものとして与えることで、デコード性能が向上することがわかっている。しかし、実際は、二準位系との相互作用によりエラー率は非定常的となることが示されており、各時刻でエラー率が異なるのであれば、最適なデコード戦略も各時刻で異なる。しかし、広く用いられる量子エラー訂正のライブラリであるでは、非定常的なエラーのシミュレーションに対応していないため、これらのエラーに対応するデコーダーの開発には、シミュレータを自作する必要があった。そこで本研究では、二準位系との相互作用に起因する非定常エラーのもとで、エラーを定常的だと仮定する従来のデコーダーよりも性能の良いデコーダーを開発することを目的とした。具体的に、以下の課題を検討した。

1. 非定常エラーのもとで、追加で過去のシンδροームを入力することで、エラー検知の精度は向上するか
2. シンδροームから、データ量子ビットに存在するアノマリーを推定することは可能か
3. アノマリーの推定精度が 100% の時、シンδροームに加えてアノマリーを入力することで、デコード性能は向上するか
4. エラーの検知に加えて、アノマリーの検知を行う提案のデコーダーは、エラーの検知のみを行う従来のデコーダーに比べて、非定常エラーのもとで高い性能を示すか

本プログラムにおける今後3年間の活動の方向と到達目標

日隈 俊秀 (2MI23103S)

マス・フォア・イノベーション連係学府 システム情報科学系

指導教員：谷本 輝夫，共創メンター：廣島 文生

令和6年度

1 今後の研究方針と博士論文の展望

実用的な量子計算を実行するためには、量子誤り訂正符号を実装する必要がある、代表的なものとして表面符号 [3] がある。表面符号におけるデコードは換言すると、補助量子ビットの測定結果（シンドローム）から、一意には定まらないデータ量子ビットに生じるエラーの発生箇所を推定するタスクである。しかし、その最尤推定は NP 困難であり、機械学習をはじめとするヒューリスティックな手法が多数提案されている。このエラーの推定時に、事前に測定した物理ビット毎のエラー率を定常的なものとして与えることで、デコード性能が向上することがわかっている [2]。しかし、実際は、二準位系との相互作用によりエラー率は非定常的となることが示されており [4]、各時刻でエラー率が異なるのであれば、最適なデコード戦略も各時刻で異なる。修士論文では、このようなより現実 に即したエラーモデルに耐性のある、機械学習を用いた表面符号のデコーダーの開発を行った。

博士論文の研究、および創発モデリングにおける研究は、修士論文で行った研究の対象である、誤り訂正符号に着目し、研究を発展させていく予定である。具体的には、表面符号より多数のビット間の接続性を要求するが、より性質の良い qLDPC 符号 [1] や接続符号 [5] において、現実 に即したエラーモデルにおけるデコード性能の向上を目指す。これらの研究の遂行時には、対象とする符号を実装可能なデバイスを扱う実験家との議論に基づき、問題設定の妥当性を担保する予定である。具体的には、創発モデリングにおいてシリコン量子ビットデバイスの専門家であるシステム情報科学府の木山先生と、博士論文の研究においては中性原子を用いた量子ビットデバイスの研究開発を行う NanoQT と、共同で研究を実施できるよう準備を進めている。

K-BOOST の支援を受けて行う研究は、修士研究の機械学習を用いた手法に着目し、研究を発展させていく予定である。具体的には、アノマリーの推定モデルに再帰的な構造を導入することを考えている。これは、二準位系との相互作用により生じるエラー率の変動の周期が、誤り訂正操作の 1 サイクルに要する時間に比べて非常に長い性質をもつことから、あるステップにおける高エラー率の状態（アノマリー）は、次のステップにおいても維持される可能性が非常に高いという事実に着目したためである。このように、アノマリーの推定モデルに再帰的な構造を導入することで、アノマリーの推定精度が向上し、デコードの性能が高まると考えられる。

このように、今後の研究方針として、本プログラムでは量子誤り訂正符号、K-BOOST では機械学習の観点から研究を進める。双方に取り組むことで、量子誤り訂正符号と、それに対する機械学習的な手法の理解が深まるという相乗効果が期待でき、よりインパクトのある研究に繋がると考えている。

IV 学生レポート 等

2 共創力強化インターンシップへの展望

共創力強化インターンシップでは、D2の前期頃に海外の研究機関にインターンシップという形で伺い、D1で行った研究を発展させることを希望している。具体的には、量子コンピュータのアーキテクチャの研究を世界的にけん引する、Fred Chong 先生（シカゴ大学）、Moinuddin K. Qureshi 先生（ジョージア・テック大学）、Swamit Tannu 先生（ウィスコンシン大学マディソン校）、Gokul Ravi 先生（ミシガン大学）、Poulami Das 先生（テキサス大学オースティン校）などの研究室に候補に、指導教員の谷本先生を通して連絡をとり、留学できればと考えている。

3 卓越大学院イベントに関する抱負

スタディグループにも積極的に参加し、自らの専門性を活かして貢献できればと考えている。マス・フォア・イノベーションカフェ・セミナーにも、自身と関連の深いものや興味のあるものには積極的に出席し、自身の研究に活かせればと考えている。

4 セミナー、研究集会への参加状況、研究発表状況

以下のセミナー・研究集会へ参加し、研究発表を行った。

- 第一回 QJM 研究会
- 4th International Workshop on Education and Research for Future Electronics
- The 5th International Symposium on AI and Electronics
- 第二回 QJM 研究会
- 量子情報技術研究会 (QIT51)

参考文献

- [1] S. Bravyi, A. W. Cross, J. M. Gambetta, D. Maslov, P. Rall, and T. J. Yoder. High-threshold and low-overhead fault-tolerant quantum memory. *Nature*, 627(8005):778–782, Mar. 2024.
- [2] B. Criger and I. Ashraf. Multi-path summation for decoding 2D topological codes. *Quantum*, Sept. 2017.
- [3] A. Y. Kitaev. Fault-tolerant quantum computation by anyons. *Ann. Phys. (N. Y.)*, 303(1):2–30, Jan. 2003.
- [4] T. Thorbeck, A. Eddins, I. Lauer, D. T. McClure, and M. Carroll. Two-level-system dynamics in a superconducting qubit due to background ionizing radiation. *PRX quantum*, 4(2), June 2023.
- [5] H. Yamasaki and M. Koashi. Time-efficient constant-space-overhead fault-tolerant quantum computation. *Nat. Phys.*, 2024.

山田 秀流

サイズ制約付きグラフ分割問題の拡張と パラメータ化計算量に関する研究

2MI23101W 山田 秀流

マス・フォア・イノベーション連係学府
システム情報科学系

社会上の多くの問題は、グラフ上の最適化問題として表現できる。特に予算制約を伴うようなより実用的な問題については、解サイズに制約のあるグラフ最適化問題として定式化できる。例えばある施設において、限られた k 台のカメラで可能な限り多くの廊下を監視できる配置は、**最大 k -頂点被覆問題**による定式化で求められる。他にも代表的なサイズ制約付きグラフ最適化問題として、**最密 k -部分グラフ問題**、**最大 $(k, n-k)$ -カット問題**などがある。**最大（最小） α -固定サイズグラフ分割問題（最大（最小） α -FCGP）**は、これらを含む多くのサイズ制約付き問題の一般化である。

この問題では、無向辺重みつきグラフ $G = (V, E)$ と正整数 k を入力とし、関数 $\varphi_G(S) := (1-\alpha) \cdot w(S) + \alpha \cdot w(S, V(G) \setminus S)$ を最大化（最小化）するようなサイズ k の頂点集合 $S \subseteq V$ を求める。ここで α は $\alpha \in [0, 1]$ の実数、 $w(S)$ は両端点を S に含む辺の重みの総和、 $w(S, V(G) \setminus S)$ は1つの端点のみを S に含む辺の重みの総和を表す。**最大（最小） α -FCGP**はNP-困難であり、これまでに解サイズ k や縮退数 d をパラメータとした FPT アルゴリズムの存在や、ある範囲での W[1]-困難性が示されている。

本研究ではまず**最大（最小） α -FCGP**の自然な発展として、解が連結であるという制限を加えた**連結最大（最小） α -FCGP**を考える。まず k をパラメータとした場合、**最大（最小） α -FCGP**がW[1]-困難であるとき、**連結最大（最小） α -FCGP**もW[1]-困難であることを示す。次に、平面的グラフの一般化である apex-minor-free グラフ上の劣指数時間乱択アルゴリズムを与える。さらに辺重みが定数である場合に、 $\alpha \in [1/3, 1]$ における**最大連結 α -FCGP**と、 $\alpha \in [0, 1/3]$ における**最小連結 α -FCGP**に対し FPT 近似スキームの存在を示す。

加えて、**最大（最小） α -FCGP**のハイパーグラフ $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ 上への一般化である**最大（最小）固定サイズハイパーグラフ分割問題（最大（最小）FCHGP）**を提案する。これに対しては、入力ハイパーグラフのライングラフが木である場合における多項式時間アルゴリズムを設計する。また、ハイパー辺の最大サイズ s とライングラフの木幅 tw をパラメータとする $2^{O(s \cdot tw)} n^{O(1)}$ -時間アルゴリズムの設計を行う。

IV 学生レポート 等

本プログラムにおける今後3年間の活動の方向と到達目標

山田 秀流 (2MI23101W)

マス・フォア・イノベーション連係学府 システム情報科学系

指導教員：土中 哲秀，共創メンター：神山 直之

令和6年度

社会上の予算制約を伴うような実用的な諸問題は、解サイズに制約のある組み合わせ最適化問題として定式化可能である。しかし最適化問題の多くはNP-困難であり、また“良い”構造をもつ入力に対して高速に動くアルゴリズム（FPT アルゴリズム）についても存在するか、あるいは存在しないと予想されるクラス（W[1]-困難）であるか不明な問題が多い。私は修士課程での研究において、多くの代表的なサイズ制約付き問題の一般化である α -固定サイズグラフ分割問題（ α -FCGP）及びその拡張問題に対し、FPT アルゴリズムをはじめとした複数の高速アルゴリズムの設計や、W[1]-困難性の証明を行なった。博士課程ではまず、この問題に対する未解決の課題に挑戦する所存である。さらにそれを起点とし、より広範な問題やその他の様々な最適化問題に内在する本質的な数理構造を解析し、高性能アルゴリズムを設計したいと考える。また関連分野として、数学創発モデリングにおいても最適化アルゴリズムの観点から研究を進め、多角的な知見の獲得にも努めたいと考える。

共創力強化インターンシップについては、産学が海外を希望する。博士課程卒業後は、博士課程において培ったアルゴリズムに関する知識および技能を活かし、企業または大学において研究活動を遂行することを目指す。そのためには、私の研究がどのように社会で役立つのかという知見が必要不可欠である。修士課程一年時には、ESGI という国際研究会において、電気自動車普及を目的とした充電スタンドの配置問題に対し、私は平面グラフ上の最大 k -頂点被覆問題に対するアルゴリズムを用いるアプローチを提案した。しかしながら、この充電スタンドの例に象徴されるように、実社会における計算時間の制約が顕在化する課題については、理論研究のみでは十分に把握し得ない側面があると認識している。また修士課程二年時に、富士通研究所における夏季インターンシップに参加し、企業研究についてより深く知りたいと感じた。富士通など最適化を扱う民間企業における産学共創力強化インターンシップへの参加を通じ、自身の研究成果が社会にどのように寄与し得るかを実感したいと考えている。さらに、博士課程においては、FPT 分野に関する研究を国外の大学の研究者と連携して推進し、知識の深化とともに英語力の向上にも努めたいと考えている。そのために、国際共創力強化インターンシップを役立てたいと考える。

また、修士課程において十分な参加機会を得られなかったスタディグループ、ならびにマス・フォア・イノベーションカフェ・セミナー等のイベントについては、博士課程において学際的な視野を拡大するための重要な機会と捉え、積極的に参加する所存である。

また、以下に参加した学会発表について示す。なお、第20回 情報科学ワークショップにおいては、優秀プレゼンテーション賞を受賞した。

査読有国際会議論文

・S. Yamada, T. Hanaka: Fixed-Parameter Algorithms for Cardinality-Constrained Graph Partitioning Problems on Sparse Graphs, In: Proceedings of the 9th International Symposium on Combinatorial Optimization (ISCO 2024), Lecture Notes in Computer Science 14594, pp. 220–232, Springer, 2024.

・S. Yamada, T. Hanaka: Parameterized Complexity of Fixed-Cardinality Graph Partitioning and Its Variants, The 24th Korea–Japan Joint Workshop on Algorithms and Computation (WAAC, 2024), 2024.

・S. Yamada, T. Hanaka: Fixed-parameter Algorithms for Fixed Cardinality Graph Partitioning Problems on Sparse Graphs, Indonesia–Japan Conference on Discrete and Computational Geometry, Graphs, and Games (IJCDCG~3, 2023), 2023.

国内会議発表，国際研究会発表

2024 年度 九州地区における若手 OR 研究交流会 (2024)，第20回 情報科学ワークショップ (2024)，COMP-AFSA 学生シンポジウム (2024)，冬のLA シンポジウム 2023, (2024)，2023 年度 九州地区における若手 OR 研究交流会 (2023)，第19回 情報科学ワークショップ (2023)，夏のLA シンポジウム 2023(2023)，173 European Study Group with Industry (ESGI)(2023)，火の国情報シンポジウム 2023(2023)

秋山 智紀

Kullback-Leibler divergence の構造に着目した予測分布の提案

九州大学大学院マス・フォア・イノベーション連係学府

指導教員 : 大西俊郎

学生番号 : 2MI23201Y

氏名 : 秋山智紀

指数型分布族において最尤推定量に関する対数尤度比と Kullback-Leibler divergence がバランスする等式 (以下, 鞍点等式と呼ぶ) が Kullback (1959) によって示されている. 一方で, ある推定量について対数尤度比と Kullback-Leibler divergence が平均的にバランスすることは稀なケースである. 本論文では特定の推定量が対数尤度比と Kullback-Leibler divergence を平均的にバランスする等式 (以下, 平均鞍点等式と呼ぶ) を厳密に, もしくは近似的に満たすことを示した. 具体例で正規分布, 逆ガウス分布, ガンマ分布, hyperbola 分布, von Mises 分布を 2-パラメータの指数型分布族として扱い, Kullback-Leibler divergence の特徴的な構造に注目することで統一的な手法で示す. また, 鞍点等式と平均鞍点等式を満たすことから最尤推定量を頻度主義の意味で優越することも示す.

また, 本論文では Bayes 的な枠組みからのアプローチも行う. これは, 条件付き推論を Bayes 的な枠組みで捉えることを試みた Yanagimoto & Miyata (2024) から着想を得た. 条件付き推論は, 関心のあるパラメータと攪乱パラメータに分かれているとき, 攪乱パラメータの影響を取り除いてから関心のあるパラメータについて推論するというものである. 例として扱う 5 つの指数型分布族について通常と異なる視点から条件付き推論を捉える. このことにより, 条件付き推論の手法が適用できない場合であっても関心あるパラメータに関する優れた推定手法を見出すことが可能であることを示す.

References

- [1] Kullback, S., 1959. Information Theory and Statistics. Wiley.
- [2] Yanagimoto, T., Miyata, Y., 2024. A pair of novel priors for improving and extending the conditional MLE. Journal of Statistical Planning and Inference, Volume 231, 106117. (to be appeared)

IV 学生レポート 等

本プログラムにおける今後3年間の活動の方向と到達目標

秋山 智紀 (2MI23201Y)

マス・フォア・イノベーション連係学府 経済学系

指導教員：大西 俊郎，共創メンター：中島 直樹

令和6年度

・今後の研究方針と博士論文の展望

修士論文では比較的理論的な研究を行ったが、今後は応用を見据えた研究を行いたい。ゆくゆくは exponential dispersion model へ拡張していきたいが、直近では修士論文で用いた手法が Tweedie 分布に適用可能かどうかを検討したい。Tweedie 分布は降水量のモデリングや保険金請求の頻度・大きさのモデリングといった様々な場面で使用される分布である。しかし、Tweedie 分布特有のパラメトリゼーションや分散関数の性質から修士論文で用いた手法が適用できるか未知数である。修士論文の内容を発展させていき、シミュレーションも含めて実務での利用を目指して博士論文に取り組んでいく予定である。

・共創力強化インターンシップへの展望

現状は漠然とした方向性しか考えていないが、C-ENGINE を利用し、企業へのインターンシップを考えている。ただし、自身の専門分野とのより良いマッチングのために他のプログラムの利用も考えている。産学連携のみならず、海外・異分野も視野に専門や共創モデリングの内容とのマッチングを吟味して決定したい。

・卓越大学院イベントに関する抱負

スタディグループワークショップでは経済学系であることを活かして専門の統計分野だけでなく、基本的な時系列解析の知見を用いて取り組んできた。時には他の学生に相談を受け、アイデアの提供や共に試行錯誤することも多かった。スタディグループワークショップでは小さなグループで分かれることが多いため、今後はこれまでの経験を活かして学術的な面のみでなく、学生間のコミュニケーションや相談を円滑に行えるよう取り計らう等グループワークの面についても意識して取り組みたい。また、博士前期課程の間は専門に比較的近いテーマを選んだが、専門外のテーマについても可能ならば取り組みたい。

マス・フォア・イノベーションカフェ・セミナーには、予定が合わず参加できないことが多かったが、数回参加できた。内容については理解が難しい部分も多かったが、数学を勉強するモチベーションになった。交流の場としても有益であったので、今後も可能な限り参加していきたい。

また、IMI Colloquium についてはオンラインではあるが、ほとんど参加できた。専門外のテーマであっても大まかに内容を把握できるものが多く、視野が広がった。今後も参加していきたい。

・セミナー、研究集会への参加状況、研究発表状況

セミナーでは数理統計学特研で Hogg et al. (2019) を輪読し、それ以外にも指導教員と Yanagimoto and Miyata (2024) を輪読した。Yanagimoto and Miyata (2024) では周辺知識を適宜確認しながら読み進め、修士論文の着想を得た。

研究発表について、今後は修士論文を改善し、発表することを目標としたい。

・その他の関連する活動

その他の活動として、大学院教育改革フォーラム 2023 に参加した。その際、ワークショップにて優秀発表賞を受賞した。講演やワークショップを通して今後のキャリアを考えるきっかけになっただけでなく、他の卓越大学院プログラムに参加している学生との交流もできた。卓越大学院プログラムは各プログラムごとに特色があるため、互いの専門のみならずプログラムに関する情報交換も有意義なものであった。

参考文献

- [1] Robert, V. Hogg, Joseph, W. McKean, and Allen, T. Craig. 2019. *Introduction to mathematical statistics, 8th ed.* Boston; Pearson.
- [2] Yanagimoto, T., Miyata, Y., 2024. A pair of novel priors for improving and extending the conditional MLE. *Journal of Statistical Planning and Inference*, Volume 231, 106117. (to be appeared)

5. Preliminary Thesis Exam Abstracts

河面 瑛太郎

Preliminary Thesis Exam Abstracts

河面 瑛太郎

1. 研究の背景・過程・今後の戦略

背景

- PLOS ONE の論文では安定 OU 過程を用いて BOLD 信号を解析(文献)
- 論文内の実際の解析では安定 OU 過程をオイラー近似したモデルで解析(理論的根拠なし)
- そのため, $\beta \neq 0$ を含む一般の場合の安定 OU 過程についての先行研究はない(歪みのない $\beta = 0$ 場合の文献はある)
- 私たちは OU 過程のパラメータ推定法と推定量の漸近挙動の解明とモデルの実データへの応用を目指す

過程

理論面

- 結果として真値が $\alpha > 1$ かつ $\beta = 0$ だった場合の推定量の漸近挙動が分かった
- $\alpha > 1$ かつ $\beta \neq 0$ の場合, 推定量の漸近分布を求めるために必要な観測情報量の収束先を求めた. これが正則性を持つかどうか調べたい

応用面

- EEG や fMRI のような実データに OU モデルを当てはめてパラメータ推定をするシミュレータを作った
- 使った EEG データ: ある被験者の一つの部位から得られた時系列を解析.
データ数 113665, 観測幅 1/512s.
- 使った fMRI データ: ある被験者の 18 部位からとった時系列データ.
一つの部位が 850 のデータを持つ.
- EEG の解析方法: 時系列データを等分割してそれぞれの区間に OU 過程モデルを適用してパラメータ推定
- fMRI の解析方法: 全体のデータ数が少ないため, 部位ごとに OU 過程モデルを適用しパラメータ推定

今後の戦略

- $\alpha > 1$ かつ $\beta \neq 0$ の場合の推定量の漸近挙動の解明
- 実際のデータに対する数値実験結果を増やす

2. 数学共創モデリング・数学創発モデリングの報告(研究テーマ、活動内容、成果等)
 - PLOS ONE の BOLD 信号や BNCI の EEG データを取得しそのパラメータ推定を行った
 -
3. 共創力強化インターンシップの報告(期間、企業・部署名、研究テーマ、活動内容、成果等)

期間: 2023 年 11 月 1 日 ~ 1 月 15 日

研究室名 佐賀大学大学院 医学系研究科 川口淳研究室

活動内容 EEG データの線形混合モデルでの解析

成果 EEG データの Matlab での取得方法, 線形混合モデルでの解析法や結果の可視化の技術を学んだ.

4. 卓越大学院プログラムの種々の活動報告(学会発表、セミナー、研究集会参加報告等)
 - 2023 年 2 月 21 日 イリノイ大学での発表 「EFFICIENT ESTIMATION OF HEAVY TAILED STABLE LINEAR REGRESSION」
 - 2023 年 6 月 19~23 日 Limerick 大学で開催された European Study Group with Industry に参加
 - 2023 年 9 月 15 日 高専との連携によるモノづくりと数学の融合 「輸液ポンプの流量誤差に関する統計的解析」
 - 2024 年 12 月 6 日 第 29 回 情報・統計科学シンポジウム 「安定 OU 過程の観測情報量の漸近挙動」
5. 最終年度のプログラム生としての活動計画
 - 統計関連学会連合大会での発表

Preliminary Thesis Exam 発表予稿

田島 凌太

1 研究の背景・過程・今後の戦略

私は修士課程から現在に至るまで、モックモジュラー形式の p 進的な性質について研究を行っている。モックモジュラー形式は分割数やフルビッツ類数など重要な数論的不変量の母関数になっている。その為、モックモジュラー形式の p 進的な性質を調べることで、これら不変量の p 進的な性質を調べることが期待できる。

モックモジュラー形式とは、ラマヌジャンのモックテータ関数を起源にもつ古典的な対象である。しかし、ラマヌジャンはモックテータ関数の定義を述べることはなく、そのいくつかの例とそれらの満たす関係式などを述べたのみであった。その為、モックテータ関数の研究は、ラマヌジャンの言わんとするモックテータ関数の定義を見つけることから始まった。その後、2002 年の Zwegers 氏の博士論文により、モックテータ関数の数学的な定義が与えられる (cf. [5])。彼はラマヌジャンのモックテータ関数が、ある調和 Maass 形式の正則部分と解釈されることを発見した。これを踏まえ現在では、調和 Maass 形式の正則部分のことをモックモジュラー形式と呼んでいる。

モックモジュラー形式は重さ k と呼ばれるパラメータがあり、これは整数や分数 (ここでは半整数と呼ぶ。) を値にもつ。重さが整数か半整数かでモックモジュラー形式の持つ数論的な性質は大きく異なる。重さが整数の場合、モックモジュラー形式のフーリエ係数は一般的に超越数である。一方、重さが半整数の時にはフーリエ係数にフルビッツ類数など面白い数論的量が現れることが分かっている。しかし、重さが半整数の場合は、重さ整数の場合に比べて研究が困難である。そこで、私はまず重さが整数の場合に p 進的な性質を調べ、その後に重さを半整数に p 進的に近づけることを試みたい。例えば $1/3$ は 2 進整数であり、2 進数の世界では整数列の極限として書ける。このような重さの近似によって重さ半整数の場合の p 進的な性質を調べ、数論的不変量の研究に応用したい。

以下では $g \in S_k(\Gamma_0(N))$ を重さが整数の normalized newform とし、虚二次体 L に虚数乗法 (CM) を持つと仮定する。このとき、すべてのフーリエ係数が代数的なモックモジュラー形式 $f^+(q)$ が g から定まる (cf. [2])。このようなモックモジュラー形式をここでは good lift (of g) と呼ぶ。ただし、good lift は一意的ではないことに注意する。このとき、 g にのみ依存する一意的な p 進数 α_g が存在して、good lift $f^+(q)$ と α_g から p 進モジュラー形式が構成できる (cf. [1])。素数 p が L で inert な場合の構成法を詳しく見てみる。 $X^2 - C_g(p)X + p^{k-1}$ の根で p 進付値の小さい方を β と書く。また、 q 級数 $E_{g|V(p)}(q)$ を $E_{g|V(p)}(q) := \sum_{n>0} (pn)^{1-k} C_g(n) q^{pn}$ で定義する。

Theorem 1 ([1, Theorem 1.3]). 素数 p が N を割らず、 L で inert だと仮定する。 f^+ を g の good lift とし、 $\gamma \in \mathbb{C}_p$ に対して、

$$\mathcal{F}_\gamma := f^+ - \gamma E_{g|V(p)}$$

と定める。このとき、 $\mathcal{F}_\gamma$ がレベル pN 、重さ $2-k$ の p 進モジュラー形式となる $\gamma \in \mathbb{C}_p$ がただ一つ存在する。この値を α_g と書くと次が成り立つ。

$$\alpha_g = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{C_{D^{k-1}(f^+)}(p^{2m+1})}{\beta^{2m}}$$

ここで、 $D := q(d/dq)$ である。素数 p が L で split する場合も、ある一意的な p 進数 α_g から同じように p 進モジュラー形式が構成できることが知られている。更に、 p が split する場合は常に α_g は 0 になることも分かっている (cf. [1])。しかし素数 p が inert な場合では、 α_g に関する先行研究はほとんど得られていなかった。その為、私は素数 p が L で inert な場合に α_g の研究を行った。

次に私の研究の経過について述べる。まず私は博士 1 年までの期間で次の定理を証明した。

Theorem 2. [4, Theorem 1.5] 素数 p が $2N$ を割らず、 L で inert だと仮定する。 $\dim S_k(\Gamma_0(N)) = 1$ の

とき、 α_g は p 進単数である。

この定理に関する論文は、2023 年 11 月 20 日に The Ramanujan Journal に出版された。その後、 g の重さが 2 でフーリエ係数が有理数の場合に同様の結果を示すことができた。このとき g の周期格子 Λ を

$$\Lambda := \left\{ \int_{-\infty}^{\gamma(\infty)} 2\pi i g(\tau) d\tau \mid \gamma \in \Gamma_0(N) \right\}$$

と定める。これは $\mathbb{C}$ 上の格子を定めるため、 $\mathbb{C}/\Lambda$ は $\mathbb{C}$ 上の楕円曲線となり、その $\mathbb{Q}$ 上の Weierstrass model として

$$E: y^2 = 4x^3 - g_2(\Lambda)x - g_3(\Lambda)$$

が取れる。また、周期積分を考えることでモジュラー曲線 $X_0(N)$ から $\mathbb{C}/\Lambda$ への写像

$$\phi: \tau \mapsto - \int_{\tau}^{i\infty} 2\pi i g(\tau') d\tau' \bmod \Lambda$$

を考えることができる。この写像の次数を C_g と書く。

Theorem 3 ([3, Theorem 1.1]). Weierstrass model E は $p \geq 5$ で good reduction であると仮定する。このとき、素数 p が L で inert ならば、 $C_g \alpha_g$ は p 進単数である。

この定理に関する論文は、2024 年 12 月 17 日にプレプリントサーバー arXiv に投稿済みであり、その後ジャーナルにも投稿し、現在査読中である。今後は、一般の重さ k に対して、 α_g が 0 でないことを示したい。

2 数学共創モデリング・数学創発モデリングの報告

まず修士課程で行われた共創モデリングでは、岡本剛准教授のもとで隠れ層が一層からなる Feedforward neural networks(FNNs) についての学習・研究を行なった。FNNs は脳神経回路の簡易的なモデルである。図 1 における矢印は神経回路を表しており、 $1, \dots, n$ はニューロンを表している。 $\mathbf{a} = (a_{i,j})$ は神経回路の重さである。入力 $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1, \dots, N}$ から出力 $N_{\sigma, n}(\mathbf{x})$ は

$$N_{\sigma, n}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c_j \sigma(\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{x} + b_j)$$

と書ける。ここで、 $\mathbf{a}_j = (a_{i,j})_{i=1, \dots, N}$ であり、 σ は区間 $[0, \infty)$ の特徴関数である。ニューロンは、ある一定量以上の情報を受け取ると発火するが、それより小さい情報量では発火しない。この現象を数学的に記述するために関数 σ が用いられている。共創モデリングでは、 $N_{\sigma, n}(\mathbf{x})$ の形からなる関数空間の位相的性質について学習・研究を行なった。

数学創発モデリングでは、岡本先生が焚き火の動画を用いて暗号を作ることを試みていたため、共通鍵暗号の基礎理論からセミナーを行なった。セミナーでは主に共通鍵暗号の具体例として、楕円曲線を用いた暗号理論の学習を行なったが、数学的な細かい証明等には触れず、新しい暗号作成への応用を念頭にセミナーを行なった。また、同時期に符号理論に関するセミナーも行った。特に誤り訂正符号の例として代数幾何符号についてのセミナーを行なった。符号とは、ある情報を数字やアルファベットなどに変換したものである。例えば、その日の天気は晴れのとき 00、曇りのとき 01、雨のときを 10 で表現するとする。このとき、文字列 010100 は三日間の天気が曇り・曇り・晴れとなっていることを表している。一般にコンピュータでは情報を 2 進数に変換して送受信を行なっている。私は脳の神経回路も、知覚した情報を何らかの形に変換しているのではないかと考え、符号理論の応用ができないかを模索した。情報源 S の符号に用いる記号を $\mathbb{F}_q$ の元としすべての情報に対し文字列の長さは n になると仮定する。このとき、 S の符号は写像 $f: S \rightarrow \mathbb{F}_q^n$ と同一視できる。特に f の像が $\mathbb{F}_q^n$ の部分空間になっているとき、 f を線形符号という。先ほどの例は、 $S = \{\text{晴れ, 曇り, 雨}\}$ で、

IV 学生レポート 等

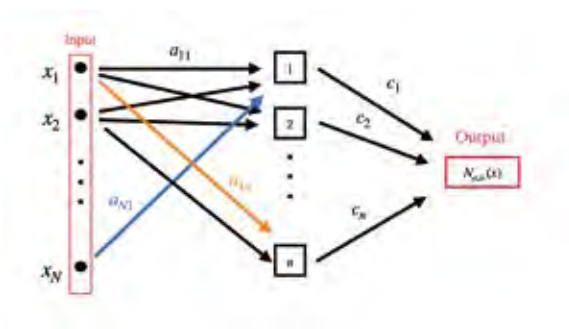


図 1 隠れ層が一層からなる FNNs

$f: S \rightarrow \mathbb{F}_2^2$ は $f(\text{晴}) = 00, f(\text{曇}) = 01, f(\text{雨}) = 10$ となる写像 f と同一視される。次に、誤り訂正符号について説明をする。コンピュータによって情報を符号化して送信する場合、ノイズ等により送信の過程で符号が変化する可能性がある。例えば、先ほどの例では送信者は 010100 を送っていたが、受信者は 110101 を受け取るというような状況が想定される。 t -誤り訂正符号とは、大雑把に言えば t 個分文字が変化しても送信者の送った情報を復元できる符号のことである。例えば先ほどの例は誤り訂正符号ではない。 $f(\text{晴}) = 00$ から 1 個分変化した 01 と $f(\text{曇}) = 01$ の区別がつかないからである。代数幾何符号は誤り訂正符号の代表的な例であり、その構成法や誤り訂正符号の基礎についてセミナーを行なった。

3 共創力強化インターンシップの報告

共創力強化インターンシップでは、2024/10/21-2024/12/27 の期間で、株式会社東芝 研究開発センターで企業インターンを行なった。本インターンシップの研究テーマは、「複数のパラメータにより定まるデジタル署名方式における署名サイズ等の削減」である。デジタル署名とは電子メッセージを誰が記入したのかを判別するためのデータであり、一般的に用いられる手書きの名前（サイン）を意味するものではない。例えば多額のお金の送金や何かの契約を電子上で行う場合、それが本人により行われたことを証明する必要がある。デジタル署名では主に「署名鍵」と「検証鍵」と呼ばれる二つのデータを用いて、署名の作成及び署名の検証を行う。ここで署名鍵とはメッセージ作成者のみが知っている秘密の情報であり、他者は署名鍵を知ることができない。一方、検証鍵は公開情報であり誰でも入手することができる。電子署名作成者は、事前に指定されたアルゴリズムをもとに、署名鍵を用いてメッセージから署名を作成する。その後メッセージと生成した署名をセットにして送信をする。メッセージ受信者は公開されている検証鍵を用いて、その署名つきメッセージが偽造されたものでないかを判定する。このような方式では、秘密鍵は自身のデバイスに保存しておく必要があり、その容量を小さくすることは実用上有用である。また、実際に生成された署名の容量も、送信速度に影響を与えるため、容量を小さくすることが求められる。他にも、電子署名の研究において、攻撃者が作成する不正署名を正確に棄却できるかも大切である。本インターンシップにおける成果の一つ目は、実験に用いられていたプログラムに、理論的に直ちに偽造されたものであることがわかる不正署名が、一定の確率で作られていることを発見したことである。これにより実験結果が確率的な振る舞いに左右されなくなり、実験結果の正確な考察が可能になった。成果の二つ目は、今回のデジタル署名方式では正しい署名と不正署名を区別できないことを実験によって発見した。つまり、不正署名の棄却率を高めようとするとき正しい署名を誤って棄却してしまう確率も同様に上がるということを発見した。

4 卓越大学院プログラムの種々の活動報告

博士後期課程において、以下の集会で講演を行なった。

1. European Study Group with Industry: ESGI 173, 2023/6/19-23, University of Limerick
2. 異分野異業種研究交流会 2023 (ポスター発表), 2023/10/14, 中央大学
3. 津田塾大学整数論ワークショップ 2023 (招待講演), 2023/11/18-19
4. Mini-workshop for young number theorists (招待講演) (国際学会), 2023/11/10-11
5. 超幾何関数の数論とその周辺 (ポスター発表), 2023/11/23-26
6. NCTS Number Theory Seminar (招待講演) (国際学会), 2024/3/25
7. 第 23 回仙台広島整数論集会, 2024/7/9-12
8. 日本数学会 2024 年度秋季総合分科会, 2024/9/3-6
9. RIMS 共同研究 (公開型) 「保型形式・保型表現の数論的側面」 (招待講演), 2025/1/20-24

5 最終年度のプログラム生としての活動計画

以下の計画のもと、博士論文執筆を行う。

1. 5 月末にインドで行われる研究集会までに、一般の重さ k で α_g が 0 でないことを示す。
2. 9 月から博士論文執筆開始。

参考文献

- [1] Kathrin Bringmann, Pavel Guerzhoy, and Ben Kane, *Mock modular forms as p -adic modular forms*, Transactions of the American Mathematical Society **364** (2012), no. 5, 2393–2410.
- [2] Jan H Bruinier, Ken Ono, and Robert C Rhoades, *Differential operators for harmonic weak Maass forms and the vanishing of Hecke eigenvalues*, Mathematische Annalen **342** (2008), no. 3, 673–693.
- [3] Ryota Tajima, *The p -adic constant for mock modular forms associated to CM forms II*, arXiv:2412.12811v1 [math.NT]. <https://arxiv.org/abs/2412.12811>, 2024.
- [4] Ryota Tajima, *The p -adic constant for mock modular forms associated to CM forms*, The Ramanujan Journal (2023), 1–13.
- [5] Sander Zwegers, *Mock theta functions*, arXiv:0807.4834v1 [math.NT]. <https://arxiv.org/abs/0807.4834>, 2008.

Several Adaptive Ridge-based Models for Electricity Consumption Forecast

Ka Long Keith Ho

RESEARCH

In a world with a growing need for reliable analysis of complex data, reliable, robust, and efficient statistical methods are called for. The overarching theme of my doctoral research surrounds efficient regularization methods for statistical and machine learning models. In particular, we are interested in the adaptive ridge (AR) scheme as a practical answer to this modern world demand. We first study the AR scheme in a heteroscedastic regression setting, where we prove lucrative estimation and variable selection guarantees, and then proceed to leverage these properties to explore generalizations in the high-dimensional regression setting.

Research Output: Heteroscedastic Linear Regression. The adaptive ridge (AR) is an iterative scheme that has emerged in the past decade as an l_2 -based alternative to the traditional l_1 - and l_0 -based methods for variable estimation and model selection. We proposed using AR in heteroscedastic linear regression, where the noise variance is modelled via a log-linear function of covariates. We generalize and sharpen the existing method in three directions:

- We prove several theoretical results of the AR estimators with a fixed number of iterations rather than focusing solely on probabilistic large-sample aspects such as the oracle property, enhancing the understanding of the evolution of AR estimates from both theoretical and computational viewpoints.
- Thanks to the proposed log-linear variance component, we provide a computationally efficient iterative estimation method for both mean and variance structures in a heteroscedastic framework, showing new asymptotic distributional and tightness results that have been missing in the previous related studies.
- We work with generalized noise structures and detail the conditions required for results to hold.

Research Output: Information Criterion-based Sparsity Threshold Selection. Variable selection comprises an important step in many modern statistical inference procedures. In the regression setting, when estimators cannot shrink irrelevant signals to zero, covariates without relationships to the response often manifest small but non-zero regression coefficients. For AR, this is an important issue that requires proper mathematical treatment. While we proved that under suitable tuning, sparse parameters will shrink towards zero with high probability, the actual estimates when working with finite samples are not exactly zero. The ad hoc procedure of discarding variables whose coefficients are smaller than some threshold is often employed in practice.

In this branch of work, we formally analyze a version of such thresholding procedures in the regression framework and develop a simple thresholding method that consistently estimates the set of relevant variables, under mild regularity assumptions. Using this thresholding procedure, we propose a one-step improved and sparse estimator that does not shrink the size of the estimates of relevant covariates.

To achieve this, we construct an approximate step function used for thresholding and design an information criterion-based penalty that is relatively stronger than traditional AIC and BIC schemes. We then appealed to the theory of weak convergence and empirical processes and proved the following results:

- Given any set of finite thresholding values, the aforementioned scheme is asymptotically able to consistently select the largest thresholding value without gaining any expected loss.
- The model selected using this thresholding scheme is asymptotically variable selection consistent.

- The sparse one-step improved estimator is asymptotically consistent under suitable assumptions of the initial estimate.

Research in progress: High Dimensional Adaptive Ridge Regression. Motivated by the success in numerical experiments of the AR in the low-dimensional setting, I began exploring the possibility of extending certain results, at least numerically, to higher dimensions. In particular, for the linear regression setting, let the number of parameters (p) be greater than the number of samples (n), and that p/n converges to some limit γ . This is known as the proportional regime, and it has garnered significant interest in the past five to six years due to this model being seen as an analyzable gateway to understanding the mathematics of more complex machine learning models, such as neural networks.

Significant works in the past include precise asymptotic risk analysis for the min-norm and ridge estimators, using random matrix theory, in the setup where both the design and signal are random. Such analyses have led to the theoretical justification of the now well-known double descent phenomenon, where the out-of-sample prediction risk drops beyond the interpolation threshold, defying classical statistical wisdom.

Yet, the discovery of a phenomenon known as sparse double descent, observed for deep neural networks, has created an interesting counter-thought to double descent. It has been observed by certain authors that, under certain scenarios, the prediction risk can be minimized by the systematic removal of neurons. Here, the AR seems to be a desirable method to perform such removal. In the low-dimensional setup, the AR can reliably identify sparse signals, and its AR penalty turns out to be a good approximation to the optimal ridge penalty proved in previous literature.

Currently, I have achieved strong numerical evidence to back this claim and found that risk can be minimized by effective dimension reduction. More importantly, the sparse double descent was observed, indicating that this phenomenon can be observed in simpler networks such as linear regression as well.

COOPERATIVE RESEARCH WITH FACULTY OF INFORMATION SCIENCE (MENTOR: PROF. JUNNACHI TAKEUCHI)

This line of research began in October 2023 and is currently ongoing. The initial phase of the joint research included various sharing of our research, as we continuously inspired each other on different possible directions of research. We have then decided that, based on their seminal work on an approximate eigendecomposition of the fisher information matrix in simple ReLU networks, to pursue research in describing the behaviour of such networks in the function space, as we noted the similarities of this with the well-known Neural Tangent Kernel (NTK).

In the past months, we have proved various new results corresponding to the main approximate eigenvectors and found that in the infinite width limit, the behaviour of the trained output is deterministic, and in some cases algebraic based on the input to the network. This provides further simplification to the NTK, and is vastly meaningful in propelling further research in understanding this area.

INTERNSHIP AT LA TROBE UNIVERSITY (CORRESPONDENT: PROF. HIEN NGUYEN)

The internship period was from August 2024 to October 2024, where I spent 9 highly productive weeks with Prof. Nguyen in constructing the aforementioned paper on information criterion-based thresholding.

The initial weeks of the internship were dedicated to daily discussions and an extensive review of relevant literature. This process helped me build the necessary intuition to design a general framework for the paper. During this time, we mapped out the core ideas, and as we gained a deeper understanding, I began drafting the manuscript. Throughout this process, I maintained regular discussions with Prof. Nguyen to ensure that both the proofs and the underlying theoretical intuition were sound. Given the complexity of weak convergence, we also spent a

IV 学生レポート 等

3

considerable amount of time carefully reviewing textbook proofs and academic papers to ensure we were drawing on the correct theoretical insights. This meticulous approach was crucial, as even minor misunderstandings in the proofs could have far-reaching consequences for the model's validity. By the end of the internship, I had completed the proofs for the main theorems of the paper and had completed a rough first draft. The draft is currently nearly finished and we are looking to submit it in the upcoming month.

PLANS FOR THE FINAL YEAR

Construction of the high-dimensional AR paper. As previously introduced, there has been numerical success with the AR scheme in high dimensions, but the method has yet to be implemented in more complex models. For this work, there are several tasks I would like to complete in the upcoming months.

Firstly, while random matrix theory has proven to be challenging to apply for the AR, there has now been light shed on linking the AR with a specific MM-algorithm and general l_q ($0 < q < 2$) regularization. If this linkage can be set up in higher dimensions, there is a strong possibility that theoretical claims can be proved.

On the other hand, the numerical success in linear regression models has motivated me to apply the result to deeper neural networks, where efficient neuron pruning for both risk and cost-reduction are seen as highly lucrative properties to have. If the AR can be implemented in these settings at a low cost, this will vastly elevate its research value.

九州大学マス・フォア・イノベーション卓越大学院プログラム

活動報告書 2024

2025年10月発行

〒819-0395 福岡市西区元岡744
E-mail: gpmioffice@jimu.kyushu-u.ac.jp
Website: <https://www.jgmi.kyushu-u.ac.jp/>

Graduate Program of Mathematics for Innovation

