

4. Prelims Abstracts

池田 香凜

修士論文要旨

池田 香凜 (2MI22003N)
 マス・フォア・イノベーション連係学府 数理学系
 指導教員：金子 昌信
 令和5年度

本修士論文は多重ゼータ値と Hurwitz ゼータ関数、それぞれに関する論文をまとめたものである。その主結果についてそれぞれ以下に述べる。

1 Multiple zeta values and Euler's reflection formula for the gamma function

まず、論文 “Multiple zeta values and Euler's reflection formula for the gamma function” [4] の概略を述べる。Riemann ゼータ関数の変数を多重化し、整数点での値に注目した対象である多重ゼータ値

$$\zeta(k_1, \dots, k_r) := \sum_{0 < m_1 < \dots < m_r} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \dots m_r^{k_r}}$$

について考察を行った。ガンマ関数の相補公式から得られる多重ゼータ値の関係式

$$\exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \zeta(n) x^n\right) \exp\left(-\sum_{m=2}^{\infty} \frac{\zeta(m)}{m} x^m\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\zeta(2, \dots, 2)}_n x^{2n}$$

を、Hoffman [2] によって導入された Hoffman 代数

$$\mathcal{R}_* = \left(\bigoplus_{r=0}^{\infty} \mathbb{Q}[\mathbb{N}^r], * \right)$$

という枠組みで調和積 $*$ のみを用いて純代数的に証明したものが以下に述べる主結果である。

定理 1 (I.-Sakata, 2022). 等式

$$\exp_* \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} [n] x^n \right) * \exp_* \left(- \sum_{m=2}^{\infty} \frac{[m]}{m} x^m \right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{[2, \dots, 2]}_n x^{2n}$$

が \mathcal{R}_* 上の形式的冪級数環 $\mathcal{R}_*[[x]]$ において成立する。ここで、 \exp_* は指数級数 $\exp_*(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n}{n!}$ 、 f^n は環 $\mathcal{R}_*[[x]]$ での冪乗である。

定理 1 は Ihara-Kaneko-Zagier [3] の補題 1 で与えられている等式の特別な場合であり、本論文は組み合わせを用いた別証明を与えたものである。

2 On real zeros of the Hurwitz zeta function

次に、論文 “On real zeros of the Hurwitz zeta function” [5] の概略を述べる。Riemann ゼータ関数の一般化の一つである Hurwitz ゼータ関数

$$\zeta(s, a) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s} \quad (s = \sigma + it, \sigma > 1, 0 < a \leq 1)$$

IV 学生レポート 等

について、その実零点に関する結果を与えた。この級数は半平面 $\sigma > 1$ において絶対かつ広義一様に収束し、 $s = 1$ での極を除いて全複素平面に解析接続される。

この関数の零点については、Spira [9] による基本的な先行研究があり、実零点についてもある程度の知見が得られている。 $\zeta(s, a)$ の定義から、 $\sigma > 1$ において実零点を持たないことは直ちにわかる。それ以外での範囲 $\sigma < 1$ においては、実零点が存在するための必要十分条件が Nakamura [7, 8], Matsusaka [6] によって Bernoulli 多項式を用いて以下のように与えられている。

定理 2 (Matsusaka [6]). 整数 $N \geq 0$ に対し、 $\zeta(s, a)$ が区間 $(-N, -N + 1)$ において実零点を持つための必要十分条件は $B_N(a)B_{N+1}(a) < 0$ を満たすことである。ここに、 $B_n(x)$ は n 番目の Bernoulli 多項式とする。

条件が Bernoulli 多項式を用いて表される理由は、 $\zeta(s, a)$ の非正の整数点での特殊値が

$$\zeta(-n, a) = -\frac{B_{n+1}(a)}{n+1}$$

と、Bernoulli 多項式を用いて表されるからである。また、 $\zeta(s, a)$ の実零点の一意性については Endo-Suzuki [1], Matsusaka [6] によって研究されてきた。

定理 3 (Endo-Suzuki [1], Matsusaka [6]). 各整数 $N \geq 5, N = 0$ に対し、 $B_N(a)B_{N+1}(a) < 0$ であれば、区間 $(-N, -N + 1)$ において $\zeta(s, a)$ の零点が唯一つ存在する。また、それらの零点は全て一位の零点である。

この証明は Endo-Suzuki が $N = 0$ の場合を、Matsusaka が $N \geq 5$ の場合を、それぞれ行った。これまでの研究では $1 \leq N \leq 4$ に対して、実零点が存在すれば一意であることが示されていなかったが、本論文では残された全ての区間に対する証明を与えた。

定理 4 (I., 2023). 各整数 $1 \leq N \leq 4$ に対し、 $B_N(a)B_{N+1}(a) < 0$ であれば、区間 $(-N, -N + 1)$ において $\zeta(s, a)$ の零点が唯一つ存在する。また、それらの零点は全て一位の零点である。

これにより、Hurwitz ゼータ関数の実零点は Riemann ゼータ関数の場合と同様に全て一位の零点であることが示された。この証明は主に、Endo-Suzuki が用いた手法を一般化したものに少し工夫を加えることにより行った。さらに、Matsusaka の手法を用いることによって $N = 4$ の場合のみ示すことも分かった。

References

- [1] K. Endo and Y. Suzuki, Real zeros of Hurwitz zeta-functions and their asymptotic behavior in the interval $(0, 1)$, *J. Math. Anal. Appl.*, **473** (2019), no.2, 624–635.
- [2] M. Hoffman, The algebra of multiple harmonic series, *J. Algebra*, **194** (1997), 477–495.
- [3] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier, Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values, *Compos. Math.*, **142** (2006), 307–338.
- [4] K. Ikeda and M. Sakata, Multiple zeta values and Euler’s reflection formula for the gamma function, to appear in *Comment. Math. Univ. St. Pauli.*, **71**.
- [5] K. Ikeda, On real zeros of the Hurwitz zeta function, to appear in *J. Number Theory*.
- [6] T. Matsusaka, Real zeros of the Hurwitz zeta function, *Acta Arith.*, **183** (2018), no.1, 53–62.
- [7] T. Nakamura, Real zeros of Hurwitz-Lerch zeta and Hurwitz-Lerch type of Euler-Zagier double zeta functions, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **160** (2016), no.1, 39–50.
- [8] T. Nakamura, Real zeros of Hurwitz-Lerch zeta functions in the interval $(-1, 0)$, *J. Math. Anal. Appl.*, **438** (2016), 42–52.
- [9] R. Spira, Zeros of Hurwitz zeta functions, *Math. Comp.*, **30** (1976), no.136, 863–866.

本プログラムにおける今後3年間の活動の方向と到達目標

池田 香凛 (2MI22003N)

マス・フォア・イノベーション連係学府 数理学系

指導教員：金子 昌信, 共創メンター: 野下 浩司

令和5年度

(1) 博士前期課程での取り組み

- セミナー, 研究会への参加・運営状況
九大内で開催されている, 九大代数学セミナーや九州関数方程式セミナーに参加した. それ以外にも, 関西多重ゼータ研究会に参加し, 現在どのような研究がされているかを知ることや他大学の研究者との交流を深めたりした. また, マス・フォアイノベーションセミナーの世話人, 第17回ゼータ若手研究会の世話人, 九州代数的整数論2024の世話人を行った.
- 研究発表, 受賞状況
国際会議での発表4件(ポスター発表1件, 口頭発表3件), 国内会議での発表17件(ポスター発表1件, 口頭発表16件)を行った. また, 第150回日本数学会九州支部例会において, 第9回九州若手数学者発表賞, 第12回九州若手数学賞を受賞した.

(2) 博士後期課程の展望

- 研究方針と博士論文の展望
現在研究している, 2つの研究を進める. 一つ目に, 今まで研究されてきた中央二項級数の Hurwitz 版を考え, その特殊値に関する研究をしている. この研究を進めるために shifted log-sin 積分を勉強し, Hurwitz 版にする際に付け加えたパラメータが半整数以外の場合の結果も得たい. 二つ目に, Goldbach 表現の平均個数評価について研究をしている. 現在得ている結果は q の倍数に対してのみであるが, 節法を勉強して, q を法として考えた場合の全ての剰余に対して結果を得て論文を投稿したいと考えている.
- 共創力強化インターンシップ
共創力強化インターンシップは海外を希望している. カナダにある, クイーンズ大学の Ram Murty 先生のところに行きたいと考えている.
- 共創モデリング
博士前期課程では, 生物の形態進化に着目して, アザラシの歯のかたちのモデリングと形態測定学的解析を行った. 多くの種類のアザラシを想定しシミュレーションを行い, 標識点ベースの形態測定学を用いて, 定量的な評価をおこなった結果, 平行移動, 回転, 拡張に対する幾何学的不変量である形状の意味でズキンアザラシ様の歯形態は比較的バリエーションが小さく, またワモンアザラシ様とカニクイアザラシ様が似ていることがわかった. その結果を2023年数理生物学会年会で発表した. この研究をさらに進めて, 博士後期課程1年次の前期までに論文にまとめ, 生物学専門誌もしくは一般誌へ投稿したいと考えている.
- マス・フォア・イノベーションセミナー
博士前期課程2年の後期から世話人となり, 外部企業の方を講演者として呼んだり, セミナー前の時間にカフェを開催したりした. 博士後期課程においても, 引き続き外部の企業, あるいは他分野の方を講演者として迎え, セミナーを定期的に開催したい. また, セミナーが続いていくように, 後輩にセミナーの世話人を引き継いでいきたい.

Prelims 発表予稿

河本 亘平 (2MI22005K)

マス・フォア・イノベーション連係学府 数理学系

1 修士論文の概要

Spectral clustering は、主成分分析を応用した非分類データをクラスタリングする手法の一つである。Spectral clustering algorithm の精度保証における既存研究はグループごとに共分散行列が等しいという仮定で行われることが多い。本研究では共分散行列に allometric extension model を仮定し、平均が既知の場合と未知の場合での spectral clustering algorithm を適用したときの misclassification probability に対する非漸近 bound を与える。Allometric extension model は、2 群において二つの共分散行列の第一固有ベクトルと平均の差が同じ方向であるモデルである。主結果により misclassification probability が次元と SN 比によって指数関数的に減少することを示す。また allometric extension model に spectral clustering algorithm を適用したときのパフォーマンスを数値実験により検討する。

2 修士論文の位置付け

最初に spectral clustering algorithm を評価する際に用いられるモデルを紹介する。記号の設定として μ を n 次元ベクトル, θ を $P(\theta = 1) = P(\theta = -1) = 1/2$ を満たす確率変数 (Rademacher 確率変数), $g_i^{(1)}$ を平均が 0 で共分散行列が Σ_1 , $g_i^{(-1)}$ を平均が 0 で共分散行列が Σ_2 をもつ多変量正規分布に従う確率変数とする。このとき n 次元確率変数 X を

$$X = \theta\mu + g^{(\theta)} \quad (1)$$

で定義する。モデル (1) は、母集団の平均が既知で混合比が $1/2$ であれば一般性を失わない。Spectral clustering algorithm の精度評価をしている先行研究は、 $\Sigma_1 = \Sigma_2 = I_n$ の仮定のもとで行われている (Abbe et al., 2022; Cai and Zhang, 2018; Vershynin, 2018)。しかし、多変量解析において $\Sigma_1 = \Sigma_2 = I_n$ という仮定は、条件が厳しいことが多いと思われる。そこで Kawamoto et al. (2023) と修士論文では spectral clustering algorithm のモデルとして $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ の場合を表現するモデルの一つである allometric extension model を仮定した。本研究は $\Sigma_1 = \Sigma_2 = I_n$ の状況を拡張したものである。Kawamoto et al. (2023) では平均が既知でモデル (1) に allometric extension model を仮定した場合、サンプルサイズをある程度大きくとれば標本共分散行列の第一固有値に対応する固有ベクトルが μ の方向に近づくことを利用して spectral clustering の精度を評価している。

修士論文では、サンプルサイズが大きくなっても、 $\|\mu\|_2$ が大きければ、標本共分散行列の第一固有値に対応する固有ベクトルが μ の方向に近づくことを利用して評価しており、Kawamoto et al. (2023) の結果を拡張している。さらに平均が未知の場合の評価も与えている。また修士論文では主に allometric extension model を仮定して議論しているが、結びで議論するように今後より一般的なモデルへの拡張を検討している。

3 主結果

記号の設定として正方行列 \mathbf{A} に対して, $\lambda_k(\mathbf{A})$ は \mathbf{A} の k 番目に大きい固有値, $\gamma_k(\mathbf{A})$ はそれに対応する固有ベクトルを表す. また正の整数 m に対して, n 次元観測値 $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m$ は次の確率変数に従うものとする:

$$\mathbf{X}_i = \theta_i \boldsymbol{\mu} + \mathbf{g}_i^{(\theta_i)} \quad (i = 1, \dots, m).$$

ただし $\theta_1, \dots, \theta_m$ は θ の i.i.d. コピーとし $\mathbf{g}_1^{(t)}, \dots, \mathbf{g}_m^{(t)}$ は $\mathbf{g}^{(t)}$ for $t = -1, 1$ の i.i.d. コピーとする. よって $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m$ は \mathbf{X} の i.i.d. コピーとなる. 2 群 $\mathcal{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}_1), \mathcal{N}_n(-\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}_2)$ に allometric extension 関係を仮定する. θ_i は $\mathbf{X}_i (i = 1, \dots, m)$ がどちらの群に属しているか表している. このとき $E[\mathbf{X}_i] = \mathbf{0}_n$ for $i = 1, \dots, m$ である. また平均が $\mathbf{0}_n$ の場合の標本共分散行列 \mathbf{S}_m を

$$\mathbf{S}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{X}_i \mathbf{X}_i^\top$$

で定義し, $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_m$ を $\langle \gamma_1(\mathbf{S}_m), \mathbf{X}_i \rangle$ の符号により分割する. 一般性を失わず $\langle \gamma_1(\mathbf{S}_m), \boldsymbol{\mu} \rangle > 0$ を仮定しクラスタリングの精度評価をする.

次の Theorem 1 が主定理のひとつである

Theorem 1. 定数 C, K, K_g, c は, $m, n, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}_1, \boldsymbol{\Sigma}_2$ に依らないとし $c_1 = 1 + K_g^2/\sqrt{c}$ とおく. また δ を

$$\delta = \min \left\{ 2^{5/2} c_1 \sqrt{\frac{n \max_{j=1,2} \{\lambda_1(\boldsymbol{\Sigma}_j)\}}{m \|\boldsymbol{\mu}\|_2^2}} + \sqrt{2} \left(\frac{\lambda_1(\boldsymbol{\Sigma}_1) + \lambda_1(\boldsymbol{\Sigma}_2)}{\|\boldsymbol{\mu}\|_2^2} \right) \left(CK^2 \left(\sqrt{\frac{2n}{m}} + \frac{2n}{m} \right) + 1 \right), \right. \\ \left. \frac{2^{3/2} CK^2 (2\|\boldsymbol{\mu}\|_2^2 + \lambda_1(\boldsymbol{\Sigma}_1) + \lambda_1(\boldsymbol{\Sigma}_2))}{2\|\boldsymbol{\mu}\|_2^2 + \lambda_1(\boldsymbol{\Sigma}_1) + \lambda_1(\boldsymbol{\Sigma}_2) - (\lambda_2(\boldsymbol{\Sigma}_1) + \lambda_2(\boldsymbol{\Sigma}_2))} \left(\sqrt{\frac{2n}{m}} + \frac{2n}{m} \right) \right\}$$

で定義する. もし

$$\delta \frac{c_1 \sqrt{(n-1) \max_{j=1,2} \{\lambda_2(\boldsymbol{\Sigma}_j)\}}}{\|\boldsymbol{\mu}\|_2} \leq \alpha \leq 1 - \frac{\delta^2}{2} \quad (2)$$

を満たす $\alpha \in (0, 1)$ が存在するならば

$$P(\theta_i \langle \gamma_1(\mathbf{S}_m), \mathbf{X}_i \rangle < 0) \leq \Phi \left(-\frac{(2 - \delta^2 - 2\alpha) \|\boldsymbol{\mu}\|_2}{(2 + \delta^2) \sqrt{\max_{j=1,2} \{\lambda_1(\boldsymbol{\Sigma}_j)\}}} \right) + 2(4 + e)e^{-n} \quad \text{for } i = 1, \dots, m$$

が成り立つ. ここで $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数である.

SN 比 (signal-to-noise ratio) η を

$$\eta = \frac{\|\boldsymbol{\mu}\|_2^2}{\max_{j=1,2} \{\lambda_1(\boldsymbol{\Sigma}_j)\}}$$

で定義する (この量は次元 n に依存する量である). (2) が成り立つことは, $m, n, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}_1, \boldsymbol{\Sigma}_2$ が次を満たすときに確認できる:

$$\min \left\{ 2^{5/2} c_1 \sqrt{\frac{n}{m\eta}} + \frac{2^{3/2}}{\eta} \left(CK^2 \left(\sqrt{\frac{2n}{m}} + \frac{2n}{m} \right) + 1 \right), 2^{3/2} CK^2 \left(\sqrt{\frac{2n}{m}} + \frac{2n}{m} \right) \left(\frac{1}{\eta} + 1 \right) \right\} \\ \leq \min \left\{ \frac{\alpha}{c_1} \sqrt{\frac{\eta}{(n-1)}} \sqrt{\frac{\max_{j=1,2} \{\lambda_1(\boldsymbol{\Sigma}_j)\}}{\max_{j=1,2} \{\lambda_2(\boldsymbol{\Sigma}_j)\}}}, \sqrt{2(1-\alpha)} \right\}.$$

Theorem 1 より Corollary 2, Corollary 3 が成り立つ。次の Corollary 2 は、クラスタリングの一致性が成り立つ十分条件を与えている。

Corollary 2. サンプルサイズ m と次元 n が

$$\frac{\log m}{n} \rightarrow 0$$

を $m, n \rightarrow \infty$ で満たすとき、もし

$$\frac{1}{\eta} \max \left\{ \frac{n}{m}, \frac{n^2 \max_{j=1,2} \{\lambda_2(\Sigma_j)\}}{m\eta \max_{j=1,2} \{\lambda_1(\Sigma_j)\}}, \log m \right\} \rightarrow 0$$

ならば

$$P \left(\left\{ \bigcap_{i=1}^m \{\theta_i \langle \gamma_1(\mathbf{S}_m), \mathbf{X}_i \rangle > 0\} \right\} \cup \left\{ \bigcap_{i=1}^m \{\theta_i \langle \gamma_1(\mathbf{S}_m), \mathbf{X}_i \rangle < 0\} \right\} \right) \rightarrow 1.$$

次の Corollary 3 は m 個の観測値が誤ってクラスタリングされる割合が ε 以下になる確率の評価を与えている。

Corollary 3. $\varepsilon/p > 1$ のとき次の不等式が成り立つ:

$$\begin{aligned} P \left(\frac{1}{m} \min \left\{ \sum_{i=1}^m 1_{\{\theta_i \langle \gamma_1(\mathbf{S}_m), \mathbf{X}_i \rangle < 0\}}, \sum_{i=1}^m 1_{\{\theta_i \langle \gamma_1(\mathbf{S}_m), \mathbf{X}_i \rangle > 0\}} \right\} \leq \varepsilon \right) \\ \geq 1 - e^{-mp} \left(\frac{ep}{\varepsilon} \right)^{\varepsilon m} - 2(em + 4)e^{-n}. \end{aligned}$$

ただし

$$p = \frac{1}{2} \left(\Phi \left(-\frac{(2 - \delta^2 - 2\alpha)\|\boldsymbol{\mu}\|_2}{(2 + \delta^2)\sqrt{\lambda_1(\Sigma_1)}} \right) + \Phi \left(-\frac{(2 - \delta^2 - 2\alpha)\|\boldsymbol{\mu}\|_2}{(2 + \delta^2)\sqrt{\lambda_1(\Sigma_2)}} \right) \right).$$

参考文献

- Abbe, E., Fan, J., Wang, K. (2022). An ℓ_p theory of PCA and spectral clustering. *Ann. Statist.* **50**, no.4, 2359–2385.
- Cai, T. T., Zhang, A. (2018). Rate-optimal perturbation bounds for singular subspaces with applications to high-dimensional statistics. *Ann. Statist.* **46**, no.1, 60–89.
- Kawamoto, K., Goto, Y., Tsukuda, K. (2023). Spectral clustering algorithm for the allometric extension model. *arXiv preprint arXiv:2309.06264*, 2023.
- Vershynin, R. (2018). *High-Dimensional Probability. An Introduction with Applications in Data Science.* Cambridge University Press, Cambridge.

本プログラムにおける今後3年間の活動の方向と到達目標

河本 亘平 (2MI22005K)

マス・フォア・イノベーション連係学府 数理学系

指導教員：佃康司准教授，共創メンター：大西俊郎教授

令和5年度

今後の研究方針と博士論文の展望

修士論文では，spectral clustering algorithm に関する研究を行い，関連するテキストや既存研究の調査を通じて高次元統計学についての知見を得た。博士課程では，修士論文の研究過程で得られた知見を生かして，高次元統計学の分野を引き続き研究していきたいと考えている。修士論文の今後の課題として次の3つがある：

- Allometric extension model の拡張：
Allometric extension model の各群の平均の差のベクトルの仮定の緩和
- クラスタリングの評価の精度：
修士論文で行ったクラスタリングの評価精度とシミュレーションの結果を比較
- 仮定する分布の拡張：
Sub-gaussian 分布など

また新たに興味を持っている問題として，次の2つがある：

- パラメータ数の多いモデルのパラメータ推定
- 高次元データにおける共分散行列の推定

パラメータの多いモデルに関しては，一般化線形モデル，階層モデル，混合分布モデルなどに興味を持っている。共分散行列の推定に関しては，標本共分散行列とは異なる共分散行列の推定量を提案し，その推定量の性質を議論することに興味を持っている。また，共分散行列の推定量を応用して，共分散行列の検定や固有ベクトルを用いた spectral clustering などのクラスタリング法についても議論したい。

数学創発モデリングにおいては，大西先生とのディスカッションを通じて新たな問題を発見し，ベイズ統計学のアプローチで取り組みたいと考えている。

共創力強化インターンシップへの展望

将来は，統計学の研究職に就きたいと考えており，統計学や関連分野における学術的な知識を深めるために研究機関，大学に共創力強化インターンシップを希望する。具体的なインターンシップ先については，博士一年の時期に候補を調査し，検討したいと考えている。

IV 学生レポート等

卓越大学院イベントに関する抱負

卓越大学院イベントの中でも特にスタディグループの活動に積極的に参加し、統計学を実際の問題に応用する経験を積みたいと考えている。また統計学以外の分野にも興味があり、関連イベントに参加したいと考えている。

セミナー, 研究集会への参加状況, 研究発表状況

- 九州大学統計科学セミナーと九州大学産業数理統計セミナーに積極的に参加した。
- Ecosta2023 と統計関連学会連合大会 2023 で口頭発表をした。

小島 道

修士論文の要旨

小島 道 (2MI22008W)

マス・フォア・イノベーション関係学府 数理学系

令和5年度

Trisection は、連結で向きづけられた 4 次元閉多様体を 3 つの 4 次元 1-ハンドル体に分解する概念であり、Gay–Kirby [2] によって定義された。Trisection は、連結で向きづけられた 3 次元閉多様体を 2 つの 3 次元 1-ハンドル体に分解する **Heegaard splitting** の 4 次元での類似物となっている。連結で向きづけられた 4 次元閉多様体は常に trisection を持つことが Gay–Kirby [2] によって示されているが、trisection を具体的に構成することは容易ではない。そして、閉曲面とその閉曲面上の 2 組の単純閉曲線族によって Heegaard splitting を表す **Heegaard diagram** のように、閉曲面とその閉曲面上の 3 組の単純閉曲線族によって trisection を表す **trisection diagram** もまた同論文内にて定義された。今回は、特に 2 つの曲面の直積としての 4 次元多様体に着目し、その trisection と trisection diagram の構成に取り組んだ。2 つの閉曲面の直積である、4 次元閉多様体の trisection については、Williams [3] によって、その trisection の構成法が与えられた。さらに、その構成法によって得られた trisection を表す trisection diagram を求めるアルゴリズムが提案された。修士論文内にて、Williams の結果と証明、そして具体例について紹介した。また、trisection と同様に、空でない連結な境界を持つような、連結で向きづけられたコンパクト 4 次元多様体を 3 つの 4 次元 1-ハンドル体に分解する **relative trisection** が Castro–Gay–Pinzón–Caicedo [1] によって定義されている。trisection と同様に、そのコンパクト 4 次元多様体は常に relative trisection を持つことが Castro–Gay–Pinzón–Caicedo [1] によって示されているが、具体的な構成は容易ではない。修士論文の最後では、閉曲面と境界付きコンパクト曲面の直積多様体の relative trisection についての考察、そして、その途中結果について述べた。

修士論文は以下の構成となっている。

第 1 章は、修士論文の概要と謝辞である。

第 2 章は、Williams の結果を紹介するために必要な概念を準備した。はじめに、 m 次元ハンドル、そして、種数 g の m 次元 1-ハンドル体について定義し、具体例を提示した。次に、3 次元多様体論で重要な概念である、連結かつ向きづけられた 3 次元閉多様体を 2 つの種数 g の 3 次元 1-ハンドル体に分解する **Heegaard splitting** と、その Heegaard splitting を種数 g の連結かつ向き付け可能な閉曲面 Σ_g とその上の 2 組の g 本の単純閉曲線族で表す種数 g の **Heegaard diagram** を定義した。また、種数 g の Heegaard splitting は、2 つの種数 g の 3 次元 1-ハンドル体の共通部分が各 3 次元 1-ハンドル体の境界であって、それは種数 g の向き付け可能な閉曲面 Σ_g (**Heegaard surface** と呼ぶ) となっている。その **Heegaard surface** の種数を増やす **stabilize** を定義した。それらを定義した後に、4 次元閉多様体を 3 つの種数 k の 4 次元 1-ハンドル体に分解し、それらの共通部分が種数 g の閉曲面となっている (g, k) -trisection (単に **trisection** と呼ぶ) と、その trisection を種数 g の連結かつ向き付け可能な閉曲面とその上の 3 組の g 本の単純閉曲線族で表す (g, k) -trisection diagram (単に **trisection diagram** と呼ぶ) を定義した。これらはそれぞれ、Heegaard splitting と Heegaard diagram の 4 次元での類似した概念である。第 2 章の最後では、空でない連結な境界を持つような、連結で向きづけられたコンパクト 4 次元多様体を 3 つの種数 k の 4 次元 1-ハンドル体に分解する $(g, k; p, b)$ -trisection (**relative trisection** と呼ぶ) を定義した。 $(g, k; p, b)$ -trisection は、3 つの 4 次元 1-

IV 学生レポート 等

ハンドル体の共通部分が境界成分を b 個もつような連結な向き付け可能なコンパクト曲面 $\Sigma_{g,b}$ となる。また、4次元多様体の境界と各2つの4次元1-ハンドル体との共通部分は $\Sigma_{p,b}$ となる。 $(g, k; p, b)$ -trisection は、4つの整数 $g, k, p \geq 0, b > 0$ が不等式

$$2p + b - 1 \leq k \leq g + p + b - 1 \quad (1)$$

を満たす必要がある。

第3章では、Williams による2つの閉曲面 Σ_g と Σ_h との直積である4次元閉多様体 $\Sigma_g \times \Sigma_h$ の trisection の具体的な構成法と、それが $((2g+1)(2h+1)+1, 2g+2h)$ -trisection であることの証明の詳細について述べた。そして、その trisection を表す trisection diagram を求めるアルゴリズムが Williams によって提案され、アルゴリズムによって得られたものがその trisection を表す trisection diagram であることの証明の詳細について述べた。その後、その Williams のアルゴリズムに従って、実際にいくつかの trisection diagram を具体例として挙げた。

第4章では、閉曲面 Σ_g と境界付きコンパクト曲面 $\Sigma_{h,1}$ の直積である、境界付きコンパクト4次元多様体 $\Sigma_g \times \Sigma_{h,1}$ の relative trisection について考察した。Williams の $\Sigma_g \times \Sigma_h$ の trisection の具体的な構成法とほぼ同様にして、 $\Sigma_g \times \Sigma_{h,1}$ を3つの4次元1-ハンドル体に分解することを考える。 $g = h = 0$ の場合は、Castro-Gay-Pinzón-Caicedo [1] が具体例として挙げられており、 $g > 0, h = 0$ の場合は、不等式 (1) を満たさないため、この構成では relative trisection にならないことが Williams [3] によって言及されている。そこで、私は、 $g = 0, h > 0$ の場合について考察し、得られた途中結果を紹介した。この場合の3つの4次元1-ハンドル体への分解は、不等式 (1) が成り立つことが分かった。しかし、実際にこの分解が $\Sigma_0 \times \Sigma_{h,1}$ の relative trisection となるかはまだ分かっていない。第4章の最後に、この分解が $\Sigma_0 \times \Sigma_{h,1}$ の relative trisection となっているか、そして、 $g > 0, h > 0$ の場合に $\Sigma_g \times \Sigma_{h,1}$ の relative trisection を具体的にどのように構成するのかを今後の課題として挙げた。

参考文献

- [1] N. Castro, D. Gay, J. Pinzón-Caicedo, *Diagrams for relative trisections*, Pacific J. Math. 294 (2018), 275–305.
- [2] D. Gay and R. Kirby, *Trisecting 4-manifolds*, Geom. Topol. 20 (2016), 3097–3132.
- [3] M. Williams, *Trisections of flat surface bundles over surfaces*, PhD thesis, The University of Nebraska-Lincoln, 2020.

本プログラムにおける今後3年間の活動の方向と到達目標

小島 道 (2MI22008W)

マス・フォア・イノベーション連係学府 数理学系

指導教員：佐伯 修，共創メンター：櫻井 大督

令和5年度

- 4次元多様体論には多くの未解決問題がある。その中の1つに4次元微分ポアンカレ予想と呼ばれる有名な未解決問題が存在する。4次元微分ポアンカレ予想とは、4次元球面とホモトピー同値な4次元閉多様体は4次元球面と微分同相である、という予想である。3次元のポアンカレ予想は正しいことが知られている。3次元多様体論にて重要な概念である Heegaard splitting と Heegaard diagram は、その3次元ポアンカレ予想に立ち向かう手段の1つとして扱われた。4次元多様体論にて Gay-Kirby [1] によって定義された trisection と trisection diagram は、Heegaard splitting と Heegaard diagram のそれぞれの4次元での類似した概念となっている。Trisection が4次元微分ポアンカレ予想解決に有効な手段となり得るかどうかが知るためにも、trisection という分野の理解を今後深めたい。はじめに、trisection に関する未解決問題のうちの1つである、3次元球面の Heegaard splitting は各種数に対して一意的であるという Waldhausen の定理の4次元球面の trisection に対する類似した予想 ([2] の予想 3.11) の解決に向けて研究を進めていく。また、4次元多様体を研究するために扱われるコルクと呼ばれるものも最近研究されているが、そこに関してはまだ知識不足である。そのため、来月末にコルクに関する講演が主である微分トポロジー'24 と呼ばれる研究集会に参加し、コルクについて勉強も兼ねて情報収集する予定である。

共創モデリングでは、イオンチャネルの統計モデルのパラメータ推定のために、8次元のパラメータ空間上での尤度の分布を2次元に落とすことで可視化した。2次元のデータ構造は次元を落としたことにより、8次元のデータ構造を完全に表せてはいない。そこで、創発モデリングでは、高次元のデータ構造をより正確に抽出する手段について研究していきたい。

- 共創力強化インターンシップへの展望としては、海外のインターンシップを希望している。インターンシップ先の大学はまだ確定ではないが、参考文献 [2] の著者である Zupan が所属しているネブラスカ大学リンカーン校を考えている。そして、trisection の研究に関する情報交換に努め、共同研究していきたい。
- スタディグループには毎年参加し、興味のある課題に取り組み、共同研究の話を持ち込んでいきたい。特に、社会問題とより関連している企業の課題について取り組み、社会貢献したいと考える。マス・フォア・イノベーションカフェ・セミナーでは、他分野の学生や研究者と積極的に交流し、情報交換に努めることで、興味を持つ分野を広げる。
- セミナーは週に1回2時間半程参加しており、自身の結果の発表や、同じ研究室の学生と情報交換などを行なっている。また、金曜に九州大学内にて行われるトポロジー金曜セミナーにも参加し、先行研究で知られていることや、私が専門にしている分野周辺の知識についての情報収集に務めた。研究集会の参加については、低次元トポロジーの研究集会に参加し、関連している内容については講演者との情報交換に務めている。研究発表については、第59回トポロジー新人セミナーにて PL 多様体の multisection について発表し、さらに令和6年度のトポロジー新人セミナーの幹事を努める予定となっている。また、来月末には鹿児島大学で行われるさくらセミナーにて研究発表予定である。

References

- [1] D. Gay and R. Kirby, *Trisecting 4-manifolds*, *Geom. Topol.* 20 (2016), 3097–3132.
- [2] J. Meier, T. Schirmer and A. Zupan, *Classification of trisections and the generalized property R conjecture*, *Proc. Amer. Math. Soc.* 144(2016), 4983–4997.

Pauli-Fierz モデルの基底状態の空間減衰性の下からの評価 (要旨)

辻本 裕紀 (2MI22001G)

マス・フォア・イノベーション連係学府 数理学系

指導教員：廣島 文生

令和5年度

1 要旨

本論文では、経路積分法を用いて、Pauli-Fierz モデルの基底状態 Ψ_0 の空間減衰性の下からの評価を与えた。上からの評価はこれまでもよく知られており、この上下の評価を以て、基底状態 Ψ_0 の空間減衰性のオーダーが決定された。

Pauli-Fierz モデル (PF モデル) では、電子は de-Broglie 場、すなわち Schrödinger 作用素によって支配されると仮定され、電子-光子間の相互作用は自由 Maxwell 場に Coulomb ゲージを採用したベクトルポテンシャル \mathbf{A} との最小結合によって導入される。1990 年代後半にブレイクスルーが起こって以来、PF モデルの数学的な解析が進んだ。PF ハミルトニアン自身の自己共役性は、結合定数が十分小さい場合には簡単に示すことができる。任意の結合定数の場合は [4, 7] によって示されている。PF ハミルトニアン自身の自己共役性が示されると、次に示すべきことは PF ハミルトニアン自身の基底状態の存在・非存在である。光子の質量は 0 であるため、PF ハミルトニアン自身の最低エネルギーは連続スペクトルに埋蔵されており、基底状態の存在・非存在を示すことは非自明なことであった。しかし、結合定数が十分小さい場合は [1]、任意の結合定数の場合は [3] によって、基底状態の存在が示された。特に、[1] では、赤外切断なしでも基底状態の存在を初めて示した点で重要である。PF ハミルトニアン自身の基底状態の存在が示されると、次に示すべきことはその基底状態が一意であるかどうかである。一般に、最小結合した Schrödinger 作用素 $\frac{1}{2}(-i\nabla + q\mathbf{a})^2 + V$ の基底状態は無限縮退していることが知られているが、PF モデルの場合は一意であることが [6] によって示されている。特に、その一意の基底状態 Ψ_0 は、光子数回転 Θ を作用させることにより、 $\langle 1, \Theta^{-1}\Psi_0(\mathbf{x}) \rangle_{L^2(Q)} > 0$ となることが示されている。そこで本論文では、経路積分法を応用して光子数回転した基底状態の空間減衰性について調べた。基底状態の空間減衰性の上からの評価は [5] ですでに知られている。一方、基底状態の空間減衰性の下からの評価は未だなされていなかった。本論文では、下からの評価を行い上からの評価と合わせることで、基底状態の漸近挙動を決定した。証明の概略は以下である。光子数回転した基底状態を経路積分表示し、場の持つ良い性質を利用し、外部ポテンシャルから決定される測地線の距離 [8] (近く投稿される予定) を取り入れることで、各点での減衰の下からの評価を与える。一般に外部ポテンシャル V が、十分大きな $|\mathbf{x}|$ で $|\mathbf{x}|^{2n}$ のオーダーで振る舞うときに、Schrödinger 作用素 $\frac{1}{2}(-i\nabla)^2 + V$ の基底状態の漸近挙動が $e^{-c|\mathbf{x}|^{n+1}}$ のオーダーであることが知られている。本論文では、PF モデルの基底状態も、 V が $|\mathbf{x}|^{2n}$ のオーダーで振る舞うとき、その漸近挙動は $e^{-c|\mathbf{x}|^{n+1}}$ のオーダーであることを突き止めた。

2 本論概略

本論において、PF ハミルトニアンを定義するために必要な条件は以下の 2 つである。緩増加超関数 $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_x^3)$ は $\hat{v} \in L_{loc}^2(\mathbb{R}_k^3)$ であって、

$$(1) \quad \hat{v}^*(\mathbf{k}) = \hat{v}(-\mathbf{k}) \quad (\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3),$$

$$(2) \quad \sqrt{\omega}\hat{v}, \frac{\hat{v}}{\sqrt{\omega}} \in L^2(\mathbb{R}_k^3)$$

を満たすとき、 v を紫外切断関数という。この条件は、量子放射場を定義する場合の発散の原因となる高波数領域のカットオフの役割になっている。また、電子の外部ポテンシャル $V: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ は次の 3 条件を満たすとする。

- (1) V は連続である.
- (2) 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して $V(\mathbf{x}) \geq 0$, $V_{\text{sup}}(\mathbf{x}) = \sup_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \leq 1} V(\mathbf{y}) > 0$ である.
- (3) $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} V(\mathbf{x}) = +\infty$.

PF ハミルトニアンを定義する上での一般的な V の条件は加藤分解可能であることだが, 本論では測地線の距離が定義できるような条件を採用している.

本論文の主定理は以下である.

定理 2.1 v を紫外切断関数とし, V は (1)-(3) を満たすとする. このとき, 任意の $t \geq 0$ に対して, ある $L_t > 0$ が存在して,

$$\|\Psi_0(\mathbf{x})\|_{\mathcal{F}_{\text{rad}}} \geq L_t e^{-\int_0^t \sqrt{2V_{\text{sup}}(C_s)} |\dot{C}_s| ds}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, C \in \mathcal{C}$$

が成り立つ.

証明において重要なポイントは次の 3 つである.

1 つめは, 光子数回転 $\Theta = e^{i\frac{\pi}{2}N}$ である. [6] によると, $\hat{\Pi}_E(f) = \Theta_E^{-1} \hat{A}_E(f) \Theta_E$ が成り立つので, 計算の困難を生じさせる $e^{-iq\hat{A}_E(K_t)}$ は Θ_E を作用させることにより, 解析しやすくなる. さらに, $\langle 1, \Theta^{-1} \Psi_0(\mathbf{x}) \rangle_{L^2(Q)} > 0$ が成り立つので, Jensen の不等式を用いて評価することができる.

2 つめは, Girsanov の定理 [2] である. 3 次元 (\mathcal{F}_*, P) -Brown 運動 B_t を 3 次元 (\mathcal{F}_*, \hat{P}) -Brown 運動 \hat{B}_t に変換することができる. Brown 運動の始点の平行移動に伴って現れる経路積分の評価しにくい引数を, Girsanov の定理の変換に伴って現れる因子に押し付けることで, 評価のしやすい引数に変換することができる.

3 つめは, 測地線の距離 [8] である. 望む評価に向けて相加相乗平均の関係をみたいのだが, 不等号の向きが下からの評価に対して逆のものであり適していない. そこで相加相乗平均の関係の等号成立の場合で変形する必要があり, そのために必要な十分条件が (1)-(3) である. このとき, 各々の最短経路 $C^* \in \mathcal{C}$ と $\gamma^* \in \mathcal{C}^*$ が存在して, $\int_0^t \sqrt{2V_{\text{sup}}(C_s^*)} |\dot{C}_s^*| ds = \int_0^t (V_{\text{sup}}(\gamma_s^*) + \frac{1}{2} |\dot{\gamma}_s^*|^2) ds$ が成り立つ. Girsanov の定理を適用する際の経路 γ を γ^* でとることにより, 相加平均から相乗平均へ変形することができる.

系 2.2 $V(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^{2n}$, $n > 0$ とする. このとき, ある $C_1 > 0$ と $C_2 > 0$ が存在して,

$$C_1 e^{-\frac{\sqrt{2}}{n+1} |\mathbf{x}|^{n+1}} \leq \|\Psi_0(\mathbf{x})\|_{\mathcal{F}_{\text{rad}}} \leq C_2 e^{-\frac{1}{n+1} |\mathbf{x}|^{n+1}}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

が成り立つ.

上からの評価は [5] による. この上下の評価を以て, $V \approx |\mathbf{x}|^{2n}$ で振る舞うときには, 基底状態の漸近挙動は $e^{-c_1 |\mathbf{x}|^{n+1}} \lesssim \|\Psi_0(\mathbf{x})\|_{\mathcal{F}_{\text{rad}}} \lesssim e^{-c_2 |\mathbf{x}|^{n+1}}$ であることがわかる.

参考文献

- [1] Volker Bach, Jürg Fröhlich, and Israel Sigal. “Quantum Electrodynamics of Confined Nonrelativistic Particles”. *Advances in Mathematics* 137 (1998), pp. 299–395.
- [2] Igor Girsanov. “On Transforming a Certain Class of Stochastic Processes by Absolutely Continuous Substitution of Measures”. *Theory of Probability & Its Applications* 5 (1960).
- [3] Marcel Griesemer, Elliott Lieb, and Michael Loss. “Ground states in non-relativistic quantum electrodynamics”. *Inventiones mathematicae* 145 (2001).
- [4] David Hasler and Ira Herbst. “On the self-adjointness and domain of Pauli-Fierz type Hamiltonians”. *Reviews in Mathematical Physics* 20 (2008).
- [5] Takeru Hidaka and Fumio Hiroshima. “Pauli-Fierz model with Kato-class potentials and exponential decays”. *Reviews in Mathematical Physics* 22 (2010).
- [6] Fumio Hiroshima. “Ground states of a model in nonrelativistic quantum electrodynamics. II”. *Journal of Mathematical Physics* 41 (2000).
- [7] Fumio Hiroshima. “Self-adjointness of the Pauli-Fierz Hamiltonian for arbitrary values of coupling constants”. *Annales Henri Poincaré*. Vol. 3. Springer. 2002.
- [8] Fumio Hiroshima and Oliver Matte. “Point-wise spatial decay of ground states of the renormalized Nelson model”. 2023.

本プログラムにおける今後3年間の活動の方向と到達目標

辻本 裕紀 (2MI22001G)

マス・フォア・イノベーション連係学府 数理学系

指導教員：廣島 文生，共創メンター：廣川 真男

令和5年度

今後の研究方針は、物理学において成り立つとされている事実について、そのような事実が成り立つべき数学的土台や条件とは何であるかを考察することである。当面のところ、場の Lagrange 形式から見る自発的対称性の破れと真空期待値について調べようと考えている。Lagrangian がある変換の下で対称性を持つ場合の Noether の定理により対応する保存量について、「ある局所演算子の無限小変換の真空期待値が 0 でないならば、真空状態の対称性が破れる。」という命題がある。[1, 2] の記述を引用すると、まず一般の局所演算子 $\phi(x)$ に対して、無限小変換 $\phi'(x) = \phi(x) + \varepsilon \delta_Q \phi(x)$ の下で、Lagrangian 密度 $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ の無限小変化 $\delta_Q \mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ が全微分形

$$\delta_Q \mathcal{L} = \partial_\mu K^\mu(\phi)$$

で与えられたとする。このとき、作用積分 $S[\phi, \partial_\mu \phi] = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^4x$ は不変である。また、Noether カレント

$$N^\mu = \delta_Q \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - K^\mu$$

$$\partial_\mu N^\mu = 0$$

を満たす。このとき、Noether チャージ $Q = \int N^0 d^3x$ は

$$\frac{dQ}{dt} = i[H, Q] = 0$$

を満たす。つまり、 Q は保存量となる。 Q は無限小変換 $\phi'(x) = \phi(x) + \varepsilon \delta_Q \phi(x)$ の生成子、すなわち

$$\delta_Q \phi(x) = i[Q, \phi(x)]$$

を満たす。対称性の自発的破れとは、すなわち作用積分 $S[\phi, \partial_\mu \phi]$ は対称性を持つが、真空状態 $|0\rangle$ がその対称性を破るとき、素朴に考えれば $\langle 0|Q|0\rangle \neq 0$ が成り立つということである。しかし、 $Q|0\rangle \neq 0$ のとき、 $Q|0\rangle$ のノルムは発散するので条件として適切でない。そこでまず、真空状態 $|0\rangle$ の対称性が破れていない、すなわち $Q|0\rangle = 0$ と仮定すると、任意の局所演算子 $\phi(x)$ に対して

$$\langle 0|\delta_Q \phi(x)|0\rangle = i \langle 0|[Q, \phi(x)]|0\rangle = 0$$

が成り立つ。よって、対偶を考えれば、ある局所演算子 $A(x)$ が存在して $\langle 0|\delta_Q A(x)|0\rangle \neq 0$ ならば、真空状態 $|0\rangle$ の対称性が破れていると言える。 $\langle 0|\delta_Q A(x)|0\rangle \neq 0$ なる演算子 $\delta_Q A(x)$ を秩序パラメータという。この秩序パラメータに関する命題の成り立つ数学的土台について、数学的記述をトップダウン的に構成できれば良いと考えている。

数学共創モデリングに引き続いて数学創発モデリングにおいて、量子情報技術の構築を念頭に、物理現象やその理論など量子物理学と量子情報技術のつながりを学ぶ計画である。そこで、共創力強化インターンシップでは、量子情報に限らずとも身の回りの現象からその特徴量を抽出し、情報処理を行うことによって有用なものを得るといったような、より実践的な部分について企業での研究に参加することで学ぶことができれば良いと考えている。

参考文献

- [1] 坂本 真人. 場の量子論：不変性と自由場を中心にして. 裳華房, 2014.
- [2] 坂本 真人. 場の量子論 (II)：ファインマン・グラフとくりこみを中心にして. 裳華房, 2020.

徳田 智紀

Abstract of Master Thesis for Prelims

Tomoki Tokuda*

February 12, 2024

Background and Main Theorems

The n -configuration space $C_n(X)$ of a space X is the subspace of the n -fold product space X^n defined by

$$C_n(X) = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n \mid x_i \neq x_j \text{ if } i \neq j\}.$$

The symmetric group Σ_n acts on $C_n(X)$ freely by permuting coordinates. The unordered n -configuration space is the orbit space $B_n(X) = C_n(X)/\Sigma_n$. In general, given an action of a group G on a space X , the singular chain complex of X inherits the G -action. Then $H_i(X; R)$ and $H^i(X; R)$ become a module over the group ring $R[G]$ where R is a ring with unity.

The homology groups of the unordered configuration spaces $B_n(M)$ of a manifold M are studied by Bödigeheimer, Cohen and Taylor in [1]. And this result is generalised by Chen and Zhang in [2]. By their works, the Betti numbers of $H_i(B_n(M); k)$ are almost determined where k is a prime field.

The cohomology algebra of unordered configuration spaces over closed manifolds was computed by Félix and Tanré in [3] with coefficients \mathbb{Q} and \mathbb{F}_p . For the $B_n(T^2)$, Pagaria computed its cohomology ring structure in [5]. However, in all these papers, the characteristics of the coefficient fields are required to be zero or greater than the number of coordinates of configurations.

The main result of this paper is the description of the $\mathbb{F}_2[\Sigma_2]$ -module structure of the cohomology groups $H^i(C_2(T^d); \mathbb{F}_2)$ for $d \geq 2$. The point of this study is that the characteristic of the field \mathbb{F}_2 divides the order of Σ_2 . In general, any representation of a finite group G over a finite dimensional k -vector space V is completely reducible unless the characteristic of k divides the order of G . However, without the assumption, the representation become more complicated in general.

Theorem 1.1 *The representation of Σ_2 over $H^i(C_2(T^d); \mathbb{F}_2)$ is decomposed as following:*

$$H^i(C_2(T^d); \mathbb{F}_2) \cong \begin{cases} \mathbb{F}_2^{\oplus \binom{d}{k}} \oplus \mathbb{F}_2[\Sigma_2]^{\oplus \frac{1}{2}(\sum_{j=0}^i \binom{d}{j} \binom{d-j}{i-j} - \binom{d}{k})} & \text{if } i = 2k < d, \\ \mathbb{F}_2[\Sigma_2]^{\oplus \frac{1}{2} \sum_{j=0}^i \binom{d}{j} \binom{d-j}{i-j}} & \text{if } i = 2k + 1 < d, \\ \mathbb{F}_2^{\oplus \binom{d}{k} + \binom{d}{i-d}} \oplus \mathbb{F}_2[\Sigma_2]^{\oplus \frac{1}{2}(\sum_{j=0}^i \binom{d}{j} \binom{d-j}{i-j} - \binom{d}{k}) - \binom{d}{i-d}} & \text{if } d \leq i = 2k < 2d, \\ \mathbb{F}_2^{\oplus \binom{d}{i-d}} \oplus \mathbb{F}_2[\Sigma_2]^{\oplus \frac{1}{2}(\sum_{j=0}^i \binom{d}{j} \binom{d-j}{i-j} - \binom{d}{k}) - \binom{d}{i-d}} & \text{if } d \leq i = 2k + 1 < 2d, \\ 0 & \text{if } i \geq 2d. \end{cases}$$

*Joint Graduate School of Mathematics for Innovation

As a one of the additional results, we can determine the $\mathbb{F}_2[\Sigma_2]$ -module structure of $H^i(B_2(T^d); \mathbb{F}_2)$ for $d = 2, 3$ by computing the Serre spectral sequence of the Borel construction

$$C_2(T^d) \longrightarrow C_2(T^d) \times_{\Sigma_2} E\Sigma_2 \longrightarrow B\Sigma_2.$$

Since the action of Σ_2 on $C_2(T^d)$ is free, there is canonical homotopy equivalence $C_2(T^d) \times_{\Sigma_2} E\Sigma_2 \rightarrow B_2(T^d)$. Hence, we obtain the homotopy fibration

$$C_2(T^d) \longrightarrow B_2(T^d) \longrightarrow B\Sigma_2. \quad (1.0.1)$$

Notice that the first map is the quotient map by the Σ_2 action, and the classifying space $B\Sigma_2$ is the projective space $\mathbb{R}P^\infty$. By computing the Serre spectral sequence of the homotopy fibration 1.0.1, we obtain the following result.

Theorem 1.2 *We identify $H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[\alpha]$. When $d = 2, 3$, there are isomorphisms of $\mathbb{F}_2[\alpha]$ -modules*

$$\begin{aligned} H^*(B_2(T^2); \mathbb{F}_2) &\cong \mathbb{F}_2[\alpha]/(\alpha^3) \oplus (\oplus_{j=1}^2 \mathbb{F}_2 u_{1,j}) \oplus \mathbb{F}_2 u_{2,1} \oplus (\oplus_{j=1}^2 \mathbb{F}_2[\alpha]/(\alpha^3) x_{2,j}), \\ H^*(B_2(T^3); \mathbb{F}_2) &\cong \mathbb{F}_2[\alpha]/(\alpha^4) \oplus (\oplus_{j=1}^3 \mathbb{F}_2 u_{1,j}) \oplus (\oplus_{j=1}^6 \mathbb{F}_2 u_{2,j}) \oplus (\oplus_{j=1}^3 \mathbb{F}_2[\alpha]/(\alpha^3) x_{2,j}) \\ &\quad \oplus (\oplus_{j=1}^9 \mathbb{F}_2 u_{3,j}) \oplus (\oplus_{j=1}^3 \mathbb{F}_2 u_{4,j}) \oplus (\oplus_{j=1}^3 \mathbb{F}_2[\alpha]/(\alpha^2) x_{4,j}) \end{aligned}$$

where $u_{i,j}$ and $x_{i,j}$ are elements with degree i .

To determine the module structure for the case of $d = 3$, we use the following result:

Theorem 1.3 *For any $d \geq 2$, the Stiefel-Whitney height of the \mathbb{Z}_2 -bundle $C_2(T^d) \rightarrow B_2(T^d)$ is exactly d . Here the Stiefel-Whitney height of a \mathbb{Z}_2 -bundle is the maximal integer i such that $\alpha^i \neq 0$ where α is the first Stiefel-Whitney class of the bundle.*

The Stiefel-Whitney height of a manifold M is an interesting invariant since it is related to the minimal dimension n such that a triangulated skeleton of M can be embedded in \mathbb{R}^n (see [4]).

References

- [1] C.-F. Bödigheimer, F. Cohen, and L. Taylor. On the homology of configuration spaces. *Topology*, 28(1):111–123, 1989.
- [2] Matthew Chen and Adela YiYu Zhang. Mod p homology of unordered configuration spaces of surfaces, 2022.
- [3] Yves Félix and Daniel Tanré. The Cohomology Algebra of Unordered Configuration Spaces. *Journal of the London Mathematical Society*, 72(2):525–544, 10 2005.
- [4] Daisuke Kishimoto and Takahiro Matsushita. Van Kampen-Flores theorem and Stiefel-Whitney classes, 2023.
- [5] Roberto Pagaria. The cohomology rings of the unordered configuration spaces of elliptic curves. *Algebraic Geometric Topology*, 20(6):2995 – 3012, 2020.

本プログラムにおける今後3年間の活動の方向と到達目標

徳田智紀 (2MI22004E)

マス・フォア・イノベーション連係学府 数理学系

指導教員： 蔦谷充伸 准教授， 共創メンター： 有村秀孝 教授

令和5年度

1 今後の研究方針

修士の研究から引き続き、私の興味の対象は配置空間のトポロジーである。今後の研究としては、大きく次の3つテーマを考えている。

- (1) 多重ループ空間のトポロジーの研究
- (2) 多様体上の2点配置空間のコホモロジーの計算
- (3) ゲージ群に関連する写像空間のホモロジーとコホモロジーの計算

(1)については、まだ具体的な問題に当たることができていないわけではないが、修士での研究で configuration space とその周辺の研究を調べるうちに興味を持った。トポロジー、特にホモトピー論において、基点付きループ空間を与える関手 Ω は非常に重要な対象である。ループ空間のコホモロジーやホモロジーの計算については、path-loop fibration に関する Serre スペクトル系列を用いる方法が有名である。多重ループ空間と configuration space を結びつける研究で有名なものに、May の研究 ([1]) と Segal の研究 ([2]) がある。これらの研究により、 X の n 重 (reduced) suspension $S^n X$ の $n-1$ 重ループ空間 $\Omega^{n-1} S^n X$ は、適当な configuration space と、それから構成されるある位相モノイドの分類空間とホモトピー同値になり、 $\Omega^n S^n X$ は labeled configuration space と呼ばれる、 X 上の configuration space の変種とホモトピー同値になることが示されている。現在は、特に configuration space と多重ループ空間の関連に興味があり、今後しばらく、(2) と (3) について取り組みながら、引き続き調べていきたいと思っている。

(2)については、私の修士論文の結果の一般化を図るものである。修士論文では、 d 次元のトラス上の 2-configuration space を考えた。一般に多様体上 M の configuration space から、その1成分を出力する写像は fibration になることが知られている。そのファイバーは $M \setminus *$ であり、この fibration について Serre スペクトル系列を考えることで、適当な多様体 M に対して、2-configuration space のコホモロジーは M のコホモロジーから決定できると考えている。そこで得られた結果をもとに、直積 $M \times M$ のコホモロジーと比較をすることで、2-configuration space のコホモロジー上での Σ_2 の表現が計算できることが期待される。この表現が計算できれば、Borel construction によって、unordered configuration space のコホモロジーの計算にもアプローチできる。一方で、 d 次元の開多様体上の 2-configuration space の Stiefel-Whitney height については、修士論文中のスペクトル系列の計算の背景から、 d になると言えるのではないかと予想している。

(3)については、同級生の森田泰成さんの修士論文の内容を引き継ぎ、ゲージ群のホモロジーとコホモロジーの計算を進めることを考えている。こちらは指導教官の蔦谷充伸准教授と共同で進めていきたいと考えている。

共創力強化インターンシップについては、現状海外へのインターンシップを希望している。しかし現在は、修士での研究を経て、ちょうど自身の興味の方向性が明確になってきた時期であるため、行きたい大学等については、まだ具体的な計画は立てられていない。こちらは、今後取り組みたいテーマの内、上述の(1)にあたる部分を具体化しながら、同時並行で調べていこうと思っている。

最後に修士課程でのセミナー等での研究発表状況について述べる。修士課程では、2024年2月2日に、九州大学の「トポロジー金曜セミナー」にて、今回の修士論文の結果について講演させていただいた。そして、こちらはまだ完了していないが、同年3月11日に「YMC2024」にて、「数学共創モデリング」で取り組んできた共同研究の内容についてポスター発表を行う予定である。

References

- [1] Jon Beck. Classifying spaces for homotopy-everything h-spaces. In *H-Spaces*, pages 54–62, Berlin, Heidelberg, 1971. Springer Berlin Heidelberg.
- [2] Graeme Segal. Configuration-spaces and iterated loop-spaces. *Inventiones mathematicae*, 21:213–222, 1973.

前原 将太

修士論文要旨

2MI22006T 前原将太, 指導教官: 落合啓之 教授

ベクトル空間中の超平面の有限個からなる集合を超平面配置と呼ぶが, さらに超平面配置の拡張として, 配置中の各超平面に自然数を対応させた多重配置という概念があり, これに対してある種の多項式の次数の組という形で「指数」という概念が定義される. 多重配置の指数は超平面配置の自由性という性質の解明において重要なのだが, これは一般に2次元(直線集合)の場合に関してさへほとんど解決していない. そこで修士論文では, 現在分かっていないもののうち, ある意味で最も簡単な例である B_2 型の2次元多重配置について, いくつかの場合に対数的ベクトル場のなす加群の基底を明示的に与え, それに伴っていくつかの指数が決定される事を示した. なお, 今回の修士論文は北海道大学の沼田泰英教授との共同研究 [2] に基づくものである.

1 修士論文のまとめ, 今後の進展に関する予想

修士論文における主結果を素早くまとめた後に, 今後の展望について軽く触れる. 以降, \mathbb{K} を標数がゼロである体とし, l 次元超平面配置について S を l 変数多項式環 $S = \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_l]$, $\text{Der}(S)$ を S の微分加群とする. なお後ほど出てくるように, $l = 2$ のときは $S = \mathbb{K}[x, y]$ と表記することにする.

定義 1.1 (多重配置). l 次元超平面配置 $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ に対して, 関数 $m : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ を \mathcal{A} 上の重復度と呼び, 超平面配置と重復度との組 (\mathcal{A}, m) を多重配置と呼ぶ. なお, 重復度 m に対して, $m(H_i) = m_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ のとき $m = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}_{>0}^n$ と表記し, さらに重復度の和を $|m| = \sum_{i=1}^n m_i$ で, 定義多項式 $Q = Q(\mathcal{A}, m)$ を $Q(\mathcal{A}, m) = \prod_{i=1}^n \alpha_i^{m_i}$ で定義する.

定義 1.2. l 次元多重配置 (\mathcal{A}, m) に対して, 対数的ベクトル場のなす加群を $D(\mathcal{A}, m) = \{\theta \in \text{Der}(S) \mid \forall i, \theta(\alpha_{H_i}) \in \alpha_{H_i}^{m_i} S\}$ で定義する. $D(\mathcal{A}, m)$ は次数付き S 加群であり, S 加群として階数 l である. $D(\mathcal{A}, m)$ が自由のとき多重配置 (\mathcal{A}, m) は自由であると呼び, このとき $D(\mathcal{A}, m)$ の S 加群としての基底が斉次に取り換えることが知られている. この l 個の斉次基底の次数の組を指数 $\exp(\mathcal{A}, m)$ と定義する.

実は2次元多重配置は常に自由であることが知られており, さらに2次元多重配置の指数を決定することは指数の差を決定することと同値だと分かっている. そこで, 2次元多重配置 (\mathcal{A}, m) について次を定義する.

定義 1.3. $\exp(\mathcal{A}, m) = (e_1, e_2)$ のとき, 指数の差を $|\exp(\mathcal{A}, m)| = |e_1 - e_2|$ で定義する.

重復度に関して, 以下のように *balanced*, *not balanced* という重要な分類があり, 特に *not balanced* な重復度をもつ2次元多重配置に関しては指数が完全に決定されているため, 本研究では *balanced* な多重配置の指数の決定についてのみ考える.

定義 1.4. 重復度 $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ について, 任意の i に対して $m_i < |m| - m_i$ が成り立つとき, m は *balanced* であるという. 反対に, *balanced* でない時を *not balanced* という.

定理 1.5 ([1]). \mathcal{A} を標数ゼロの体上の2次元ベクトル空間中の配置, m を \mathcal{A} 上の *balanced* な重復度とする. このとき, 多重配置 (\mathcal{A}, m) の指数の差は $|\mathcal{A}| - 2$ 以下となる.

IV 学生レポート 等

系 1.6. \mathcal{A} を $|\mathcal{A}| = 4$ を満たす配置とする. このとき *balanced* な多重配置 (\mathcal{A}, m) について, $|\exp(\mathcal{A}, m)| \leq |\mathcal{A}| - 2 = 2$ なので,

$$|\exp(\mathcal{A}, m)| = \begin{cases} 0 \text{ または } 2 & (|m| \in 2\mathbb{Z}) \\ 1 & (|m| \in 2\mathbb{Z} + 1). \end{cases}$$

本研究では, $|\mathcal{A}| = 4$ を満たす配置のうち最も簡単であると考えられる, $Q(\mathcal{A}) = xy(x-y)(x+y)$ で表される配置 (*B₂ 型のコクセター配置*) に絞って, 指数の決定について考察した.

修士論文の主結果の一部として, 以下の系があった.

系 1.7 (指数に関する主定理の系). *balanced* な重複度 $m = (m_1, m_2, m_3, m_4)$ が $|m| \in 2\mathbb{Z}, |m_2 - m_1| \geq m_4 - m_3 \geq 0$ を満たすとき, 指数の差に関して次が成り立つ.

- (1) $m_4 = m_3$ のとき,
 - (a) $m_1, m_2 \in 2\mathbb{Z} + 1$ かつ $|m| \in 4\mathbb{Z}$ ならば, 指数の差は 2 となる.
 - (b) (a) が成り立たないならば, 指数の差は 0 となる.
- (2) $m_4 = m_3 + 1$ のとき,
 - (a) 指数の差は 0 となる.
- (3) $m_4 = m_3 + 2$ のとき,
 - (a) $m_1, m_2 \in 2\mathbb{Z} + 1$ ならば, 指数の差は 0 となる.

これに関連して, 以下の予想を挙げる. 現時点で, 未解決の箇所は公式 1.10 の証明のみとなった.

予想 1.8. 系 1.7 と同じ仮定のもとで, 次が成り立つ.

- (3) $m_4 = m_3 + 2$ のとき,
 - (b) $m_1, m_2 \in 2\mathbb{Z}$ かつ $|m| \in 4\mathbb{Z}$ ならば, 指数の差は 0 となる.
 - (c) $m_1, m_2 \in 2\mathbb{Z}$ かつ $|m| \in 4\mathbb{Z} + 2$ ならば, 指数の差は 0 となる.
- (4) $m_4 = m_3 + 3$ のとき,
 - (a) $m_1 \in 2\mathbb{Z}, m_2 \in 2\mathbb{Z} + 1$ かつ $|m| \in 4\mathbb{Z} + 2$ ならば,

$$4(m_3 + 1)(m_3 + 2) \neq (m_1 + m_2 + 2m_3 + 3)(m_1 - m_2 + 2m_3 + 3) \iff \text{指数の差は } 0,$$

$$4(m_3 + 1)(m_3 + 2) = (m_1 + m_2 + 2m_3 + 3)(m_1 - m_2 + 2m_3 + 3) \iff \text{指数の差は } 2.$$
 - (b) $m_1 \in 2\mathbb{Z}, m_2 \in 2\mathbb{Z} + 1$ かつ $|m| \in 4\mathbb{Z}$ ならば, 指数の差は 0 となる.

注意 1.9. この予想は, $|m_4 - m_3| \leq 3$ のときの指数が決定できる, という事を述べている.

公式 1.10. *balanced* な重複度 $m = (m_1, m_2, m_3, m_3)$, $|m| \in 4\mathbb{Z}$, $m_1, m_2 \in 2\mathbb{Z} + 1$ に対して,

$$\sum_{i=0}^{\frac{d-m_1}{2}} \binom{d}{2i} \cdot \frac{(2i-1)!!}{(2i-m_2)!!} \cdot ((d-2i-m_1+2))^{\frac{m_1-1}{2}} = 2^{d-\frac{m_2+m_1}{2}} \cdot \frac{(d-\frac{m_2+m_1}{2})!}{(d-m_2-m_1)!!(d-m_2)!!} \cdot ((d-m_1+2))^{\frac{m_1-1}{2}}.$$

参考文献

- [1] Takuro Abe, *Chambers of 2-affine arrangements and freeness of 3-arrangements*, J. Algebraic Combin. **38** (2013), no. 1, 65–78. MR 3070120
- [2] Shota Maehara and Yasuhide Numata, *Explicit description of a basis for derivations of a Coxeter multiarrangement of type B₂*, 2023, arXiv:2312.06356.

本プログラムにおける今後3年間の活動の方向と到達目標

前原 将太 (2MI22006T)

マス・フォア・イノベーション連係学府 数理学系

指導教員：落合 啓之，共創メンター：中島 直樹

令和5年度

1. 今後の研究方針と博士論文の展望について

今後の研究方針について、一つは修士論文で得られた結果の拡張となる予想として、修論要旨-予想 1.8 があります。このうち、特に (4)-(a) は個人的にはとても面白い事実だと考えています。来月3月には大阪大学にて B_2 型の配置に特化した研究会も開かれるなど、指数についての解明を進めることは重要であると考えます。

そのため博士論文の一つ目のプランとして、今回の修士論文で発表した対象における指数の完全決定を目指す、というのがあります。現状では、重複度 $m = (m_1, m_2, m_3, m_4)$ のうち、 $\min\{|m_2 - m_1|, |m_4 - m_3|\}$ が4以上となった時がとても難しく、まだ見通しがあるとは言い難いですが、「指数の差が2である重複度にある程度近い重複度は指数の差が0となる」という定理もあり、先ほど述べた予想の内、極めて具体的に非自明な等式によって分類できた (4)-(a) は大きなとりかかりになる事実だと信じています。

なおもちろん、この予想は予めコンピュータにより計算していた結果と合致することは確かめており、証明の過程で現在解決出来ていない箇所は修論要旨-公式 1.10 のみとなっています。

2. 共創力強化インターンシップへの展望について

詳しい話はまだ何も決まっていませんが、第一候補として自分の研究している分野の第一線でご活躍されている Max Wakefield 先生が在籍されている The United States Naval Academy で少しの間面倒を見て頂く、というのを漠然と考えています。Wakefield 先生とは令和5年度12月に立教大学で行われた研究会にて、阿部先生の仲介もあってお話しさせて頂くことが出来、ある定理の証明の際に Wakefield 先生が用いていた手法を一般の多重配置の指数決定に利用することが出来ないか、特に今回自分が修士論文で扱った対象については $m_4 = m_3$ の場合はこの手法でも証明できた、などといった類のお話をさせて頂くことが出来ました。

3. 卓越大学院イベントに関する抱負

去年のSGWでは残念ながら一部日程は参加することが出来なかったのですが、あまり接点の無かった何名かの先輩・後輩とも知り合いになることが出来たので、そういった面でも学内イベントならではの良さを実感しました。博士課程に進学した際には、特にモデリング科目を通して勉強させて頂いたことについて、マス・フォア・イノベーションカフェや学外の卓越大学院関連のイベントなどでも発表する機会が得られれば良いと思っています。

4. セミナー、研究会への参加状況、研究発表状況

(a) 発表あり：

- 多項式数学セミナー (九州大学, 口頭)
- Hyperplane arrangements 2023 (立教大学, 口頭)
- 第28回日本薬剤疫学会学術総会 (京都大学, ポスター)

(b) 今後の発表予定：

- 第20回数学総合若手研究会 (北海道大学, 口頭・予定)
- Multiarrangements of type B_2 and related topics (大阪大学, 口頭・予定)
- FPSAC 2024 (Ruhr-Universität Bochum (ドイツ), 口頭・予定)

(c) その他、聴講のみ：京都大学、関西学院大学、FPT University (ベトナム)、大阪大学 など

修士論文要旨

山本 航大 (2MI22002R)

マス・フォア・イノベーション連係学府 数理学系 博士前期課程 2年

指導教員：辻井 正人 教授, 共創メンター：坂東 麻衣 教授

令和 5 年度

私の修士課程での研究題目は「双曲型力学系の分岐現象と開集合上の historic behaviour」である。Historic behaviour を持つ点の集合がルベグ測度正となることは力学系の非双曲性と強く関連している。そこで、本研究では安定的に非双曲型力学系の重要なモデルである blender に注目し研究を行なった。

力学系は 1800 年代後半に Poincaré によって、微分方程式を幾何学特性という観点から研究され始めた。Poincaré や Birkhoff によって、力学系を定性的に調べるという方向が作り出され、そこから派生した視点が力学系理論を大きく発展させるきっかけとなった。それは、2つの力学系が定性的に同じという構造安定性を定義し、力学系全体の構造を考えるというものであった。構造安定性という新しい視点が導入されたことで「どのような力学系が構造安定なのか？」という問題が生まれ、その後の力学系理論を大きく発展させるきっかけとなった。Smale は構造安定性は双曲性が関係しているの見抜き、双曲型集合が導入されわずか 10 年ほどで、双曲型力学系理論は急激に発展していった。[9]

1960 年代の重要な問題の一つとして、構造安定な系は稠密かというものがあつた。だがこれは一般次元の微分同相写像については成り立たないことがすぐわかった。この稠密性の反例として有名なのが、Newhouse 現象である。Newhouse[7] は双曲型集合の安定多様体と不安定多様体が非退化で横断的でない交わり (ホモクリニック接触) を構成し、ホモクリニック接触はある C^2 微分同相写像の集合内の開集合上ではホモクリニック接触は外れないことを示した。Newhouse 現象は 2 次元的な現象である。3 次元以上の場合では Bonatti と Díaz[2] によって blender が導入された。Bonatti と Díaz[3] は blender を用いて、ある C^1 微分同相写像の集合内の開集合上ではホモクリニック接触は外れないことを示した。

非双曲的な力学系と関連する話題として、Ruelle[8] によって導入された historic behaviour という概念がある。 f をコンパクト距離空間 M 上の連続写像とする。点 $x \in M$ が historic behaviour を持つとは、Birkhoff 平均が存在しないこと、つまり

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \delta_{f^i(x)}$$

が弱 * 位相で $n \rightarrow \infty$ で収束しないことをいう。Historic behaviour を持つ点の集合は、Birkhoff のエルゴード定理より任意の不変測度 μ に対して測度 0 となる。しかし、ルベグ測度は一般には不変測度ではないので、多くの点が historic behaviour を持つ可能性は残されている。Takens[10] は次の問題を提示した。

Takens' Last Problem ([10]). Historic behaviour を持つ点の集合がルベグ測度正であるような力学系の広いクラスは存在するか？

ここで言う「広いクラス」には明確な定義はなく、ある開集合の中で稠密な部分集合や residual 集合などを表している。この問題に対する肯定的な解答は縮小的な遊走領域と Newhouse 現象が起こる開集合を用いて桐

木と相馬 [6] によって与えられた. f に対する縮小的な遊走領域とは, 空でない連結な開集合 \mathbb{D} で以下の条件を満たすもの:

- 任意の $i, j \geq 0$ ($i \neq j$) に対して, $f^i(\mathbb{D}) \cap f^j(\mathbb{D}) = \emptyset$.
- $f^i(\mathbb{D})$ の直径が $i \rightarrow \infty$ で 0 に収束する.

定理 1 ([6]). 曲面上の微分同相写像の任意の Newhouse 現象が起こる C^r 開集合 ($2 \leq r < \infty$) 内に稠密な部分集合が存在し, その中の任意の力学系は historic で縮小的な遊走領域を持つ.

この結果は 2 次元であるため, Newhouse 現象が起こる C^r 開集合は $r = 2$ までしか得られない. そのため「3 次元以上では Takens' Last Problem の肯定的な解答を C^1 開集合でも得られるか?」という疑問が生まれる. 桐木と中野と相馬 [5] は次のことを示した.

定理 2 ([5]). ある blender を持つ 3 次元の微分同相写像 f_{kns} について, f_{kns} の任意の C^r 近傍 \mathcal{U} ($1 \leq r < \infty$) 内のある微分同相写像 $g \in \mathcal{U}$ は縮小的な遊走領域内の任意の点で historic behaviour を持つ.

定理 2 は具体的なモデルに対する結果である. この結果はより広いクラス, つまりある開集合上の稠密な部分集合に拡張でき, 定理 2 と同様の性質を満たすことが予想される. そこで本研究では, 定理 2 の拡張に向けた最初のステップとして次のことを示した.

主定理. 定理 2 で定義される微分同相写像 f_{kns} を含むホモクリニック接触の非退化な分岐の 1 パラメータ族 $\{f_\mu\}$ が存在して, μ が負で絶対値が十分小さければ, 各 f_μ の任意の C^r 近傍 \mathcal{U} ($1 \leq r < \infty$) 内のある微分同相写像 $g \in \mathcal{U}$ は縮小的な遊走領域内の任意の点で historic behaviour を持つ.

微分同相写像 f_{kns} は次のように定義される. 単位立方体を $\mathbb{B} = [0, 1]^3$ とし, \mathbb{B} 内の直方体 $\mathbb{V}_0, \mathbb{V}_1$ を $\mathbb{V}_0 = [0, \lambda_u^{-1}] \times [0, 1]^2$, $\mathbb{V}_1 = [1 - \lambda_u^{-1}, 1] \times [0, 1]^2$ とする. 局所微分同相写像 $f_{kns} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ を次のように定義する.

$$f_{kns}(x, y, z) = \begin{cases} (\lambda_u x, \lambda_{ss} y, \lambda_{cs0}) & (x, y, z) \in \mathbb{V}_0 \\ (\lambda_u(1-x), 1 - \lambda_{ss} y, \lambda_{cs1} z + \beta) & (x, y, z) \in \mathbb{V}_1 \end{cases}$$

本研究では f_{kns} にパラメータ μ を次のように加えた. 定数 δ は $0 < \delta < \frac{1}{2} - \lambda_u^{-1}$ を満たすものとする. 単位立方体 \mathbb{B} 内の直方体 \mathbb{G} を $\mathbb{G} = \mathbb{B} \setminus (\mathbb{V}_0 \cup \mathbb{V}_1)$ とし, $\{x = 1/2\} \cap \mathbb{G}$ の δ 近傍 U_δ への制限が $(x, y, z) \in U_\delta$ に対して,

$$f_\mu^2(x, y, z) = (-a_1(x - \frac{1}{2})^2 + a_2 z + \mu, a_3(y - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}, a_4(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2})$$

とする. この主定理は, 定理 2 の証明方法を用いることで示すことができる. まず, f_μ の軌道を 0, 1 の記号列を用いて表す. 上で定義した U_δ 上の点は f_μ^2 で写すことで拡大方向と縮小方向が入れ替わる. そこである開集合が U_δ 内へ移るように軌道をうまく構成する. 構成した軌道の記号列の中で開集合が縮小的, また historic behaviour を持つための記号列の条件を作れることを示すことで主定理の結果を得ることができた.

参考文献

- [1] P. Berger and S. Biebler, Emergence of wandering stable components, J. Amer. Math. Soc. **36** (2023), no.2, 397–482.
- [2] C. Bonatti and L. J. Díaz, Persistent nonhyperbolic transitive diffeomorphisms, Ann. of Math. (2) **143** (1996), no.2, 357–396.

IV 学生レポート 等

- [3] C. Bonatti and L. J. Díaz, Abundance of C^1 -robust homoclinic tangencies, *Trans. Amer. Math. Soc.* **364** (2012), no.10, 5111–5148.
- [4] S. Kiriki, Y. Nakano, and T. Soma, Emergence via non-existence of averages, *Adv. Math.* **400** (2022), Paper No. 108254.
- [5] S. Kiriki, Y. Nakano, and T. Soma, Historic and physical wandering domains for wild blender-horseshoes, *Nonlinearity* **36** (2023), no.8, 4007–4033.
- [6] S. Kiriki, and T. Soma, Takens' last problem and existence of non-trivial wandering domains, *Adv. Math.* **306** (2017), 524–588.
- [7] S. Newhouse, The abundance of wild hyperbolic sets and nonsmooth stable sets for diffeomorphisms, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1979), **50**, 101–151.
- [8] D. Ruelle, Historical behaviour in smooth dynamical systems, pp. 63–66, *Inst. Phys.*, Bristol, 2001.
- [9] 三波 篤郎, 双曲力学系理論の基礎とその発展史, <https://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~snii/seminar.html>
- [10] F. Takens, Orbits with historic behaviour, or non-existence of averages, *Nonlinearity* **21** (2008), no.3, T33–T36.

本プログラムにおける今後3年間の活動の方向と到達目標

山本 航大 (2MI22002R)

マス・フォア・イノベーション連係学府 数理学系 博士前期課程 2年

指導教員：辻井 正人 教授, 共創メンター：坂東 麻衣 教授

令和5年度

今後の研究方針と展望

今後の研究方針と展望として、修士論文要旨の定理2の結果をある開集合上の稠密な部分集合への拡張を引き続き取り組んでいく。また定理2の結果が $r = \infty, \omega$ でも成り立つかどうかとも研究していく。桐木と相馬(2017)の結果は Berger と Biebler(2023) によって C^∞ 級および C^ω 級に拡張された。よって3次元以上の場合でも同様の結果が得られることが期待される。また、historic behaviour の複雑さを測る emergence という比較的新しい概念もある。これは力学系の統計的振る舞いがある精度 ϵ で近似するのに必要な確率測度の数を測るものであり、historic behaviour の研究に新たな定量的視点を与えるものとなっている。桐木と中野と相馬(2022), Berger と Biebler(2023) では2次元の場合に結果を与えており、3次元以上の場合は、2次元の場合とは違う複雑さが現れることが予想されるため、結果がどうなるのかは自然な疑問である。

共創力強化インターンシップへの展望

共創力強化インターンシップでは、現時点では海外を希望している。大学や研究機関については、まだ未定である。私の研究対象はフランスとブラジルで盛んに研究が行われているので、どちらかの国の大学や研究機関で共創力強化インターンシップを行いたいと考えている。

卓越大学院イベントに関する抱負

これまでのスタディグループでは、データ分析や最適化に関する内容に取り組んできた。スタディグループでは普段扱うことのできないデータを扱うことができ、貴重な経験をすることができた。令和6年度以降も積極的に参加をし、より多くのことを学んでいきたいと考えている。

マス・フォア・イノベーションカフェ・セミナーは参加可能なものは積極的に参加をしてきた。異分野の人と関わりを持てる重要な機会となっているので、今後も参加をしていくつもりである。

セミナー、研究会への参加状況、研究発表状況

博士前期課程では、卓越大学院の旅費支援を受けて多くの研究会へ参加することができた。以下は中でも研究発表を行なったものである。

- 1 Lyapunov Regularity for Planar Piecewise Expanding Maps, Forum “Math-for-Industry” 2022, ポスター, 2022.11
- 2 Observable Lyapunov irregular sets for planar piecewise expanding maps, エルゴード理論研究会, 口頭, 2023.12

IV 学生レポート等

I

はじめに

II

プログラムについて

III

活動記録

IV

4. Prelims Abstracts

その他の関連する活動

令和5年度からマス・フォア・イノベーションセミナーの世話人を担当して、第11回から第13回を企画し開催した。令和6年度も世話人を務め、セミナーを開催する予定である。

LI ZEHUA

A Study on Power Saving Control Techniques for Kramers–Kronig PON System Using Adaptive Fast Fourier Transformation

氏名: LI ZEHUA (指導教員 木村俊二 教授)

1. Research Background

Digital coherent communication uses both the intensity and phase information of the optical signal for signal modulation. This enables coherent communications to provide higher data transmission capacity. However, in order to detect the phase information of the signal, the receiver needs the local oscillator light source and more photodiodes. This results in high power consumption of coherent communication systems. To achieve coherent communication at low cost, a direct detection optical receiver utilizing the Kramers-Kronig (KK) relationship is proposed as a method that can recover the quadrature amplitude modulated signal light field after direct detection. However, the traditional KK algorithm is based on time-domain signal processing and shows lack of adaptivity when applied in transmission systems like passive optical networks (PON). This causes a waste of hardware resources, thereby increasing system power consumption.

In this study, we proposed a frequency-domain signal processing-based KK algorithm to address the above issues of KK receiver. The proposed algorithm can dynamically adjust the computational complexity according to the signal to noise ratio of the receiver. Using numerical simulations, we compared the performances of the proposed algorithm with the conventional KK algorithm.

2. KK Relation Based Direct Detection

The KK relationship connects the amplitude and phase of the transfer function as given in Eq (1) and (2). Here, χ_1 and χ_2 represent real and imaginary parts of the transfer function. Using this relation, phase of the electric field can be expressed using the intensity of the field as in Eq. (3). Here H denotes Hilbert Transform and ln is natural logarithm operation. Using the calculated phase, field of the received signal can be reconstructed as shown in Eq. (4)

$$\chi_1(\omega) = \frac{1}{\pi} \rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \quad (1) \quad \chi_2(\omega) = -\frac{1}{\pi} \rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(\omega')}{\omega' + \omega} d\omega' \quad (2)$$

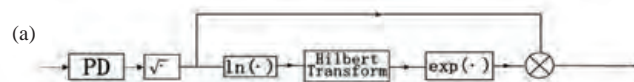
When the received light intensity is $I(t)$, its phase can be expressed as $\varphi(t)$. H represents Hilbert transform. The recovered optical electric field can be expressed as $s(t)$.

$$\varphi(t) = H \left[\ln \sqrt{I(t)} \right] \quad (3) \quad s(t) = \sqrt{I(t)} \exp[j\varphi(t)] \quad (4)$$

A schematic of the studied system is shown in Fig.1. Block diagrams of two KK algorithms studied in this research are presented in Fig.2. Simulation parameters are given in Table 1.



Fig.1 Schematic of PON (Passive Optical Networks) System



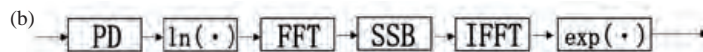


Fig.2 (a)Hilbert-KK Receiver (b)FFT-KK Receiver

Table.1 Simulation Parameter Settings

Symbol Rate [Gbaud]	25
Modulation Format	16QAM
RRC (Root Raised Cosine) Filter Roll-off coefficient	0.01
Spectrum Shift Frequency [GHz]	25.1
CSPR [dB]	10
Transmission Distance [km]	0~20
PD Sensitivity [A/W]	1
Sampling Rate [sps]	4

3.Results and Discussion

Figure 3 shows the EVM values of the two receivers at different FIR (Finite Impulse Response) taps and FFT (Fast Fourier Transform) sizes. Required number of adders and multipliers (per sample) is for conventional KK algorithm (Hilbert-KK) are $N_h/2$ and Multipliers: $N_h/2 + 2$ where N_h is the number of FIR taps. For the proposed algorithm, the required number of adders and multipliers (N samples in 25% overlapping rate) are $5N$ and $2+(5/3)N+3N\log_2N$ respectively. Based on this, we evaluated FIR taps/FFT size and power consumption of two KK receivers at different communication distances and results are presented in Fig.4.

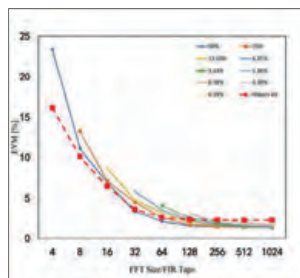


Fig.3 EVM of Different FFT Size/FIR Taps

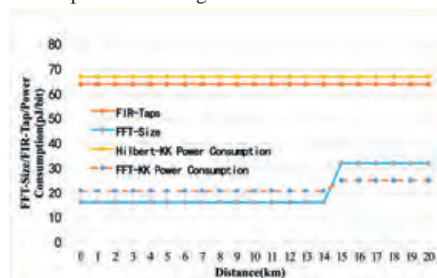


Fig.4 FIR Taps/FFT Size and Power Consumption of Different Distance

We calculated the power consumption of the PON using both algorithms using the parameters given in Table 1. When using the traditional algorithm, the power consumption is 67bit/pJ (the average of 32 ONU's distributed in Rayleigh distribution within 20km). For the proposed algorithm, the value becomes 10.68pJ/bit because we can adjust the size of the FFT according to the transmission distance of the ONU. According to the FIR-Taps and FFT sizes at different distances and different power consumption of the two receivers shown in Figures 4, the proposed FFT-KK receiver can show power consumption advantages within a communication distance of 20 kilometers. This shows that 84.05% power can be saved in PON using the proposed algorithm.

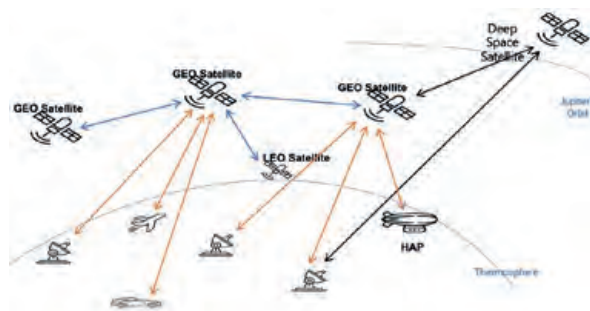
4. Summary

In this study, we propose the KK algorithm based on frequency domain signal processing and compare its performance with traditional algorithms for time domain processing. Through numerical simulation, we confirm that the proposed KK algorithm based on FFT can save 84.05% DSP power consumption compared with the conventional KK algorithm when applied in PON.

Research on using mathematical tools to achieve low power consumption coherent communication in FSO communication

Research Background

At present, Free Space Optical (FSO) communication is already regarded as a technology with great potential, especially in applications that require rapid deployment of high-speed communication links. As technology advances and new solutions are developed, FSO communications are expected to play an increasingly important role in future communications



networks. The structure of FSO communication is shown as Fig.1.

Fig.1 Free Space Communication Structure

Compared with terrestrial optical fiber communication systems, FSO systems launched into space cannot directly obtain power through cables. Therefore, the FSO communication system is more sensitive to power consumption and the weight of the communication system than traditional optical fiber communication. At the same time, the design and optimization of FSO communication systems are extremely complex and involve many key technical aspects such as signal modulation, coding, emission, transmission, reception and demodulation. Each link has a variety of technical solutions to choose from, such as the diversity of modulation methods (direct modulation, external modulation), coding strategies (coding gain, error correction capability), selection of light sources (laser type, optical emission power), Detection technology (direct detection, coherent detection) and signal recovery and enhancement methods, etc. Although each technical solution has its unique advantages and application conditions, different communication application scenarios have different performance requirements, and it is necessary to select the most appropriate technical combination solution based on specific performance requirements and changing atmospheric environmental conditions. Therefore, there is still a lot of research worthy of future system optimization of FSO communications.

Currently, Homodyne BPSK is the preferred candidate for inter-satellite optical communication links due to its increased sensitivity for both communication and tracking. It also provides complete immunity to solar background noise and interference[1]. However, the communication capacity of BPSK is greatly limited. To achieve higher communication capacity, coherent modulation schemes have attracted great interest. However, due to the more complex system design at the transmitter and receiver levels, and due to the deflection effect of atmospheric turbulence on the beam, it is difficult for the beam and local oscillator light source received by the receiver to achieve same-frequency detection or different detection like in optical fiber communications. Frequency detection. The cost of implementing FSO systems based on coherent communication is high [2]. Therefore, new solutions are currently needed to achieve high-capacity FSO coherent communications at lower costs.

For now, a research team has proposed a FSO-coherent communication using a Kramers-

Kronig (KK) receiver [3]. The results show that the transmission performance of the KK transceiver-based system is comparable to that of the coherent transceiver-based system, but the system cost and complexity are much lower. In the absence of atmospheric turbulence, coherent receivers have a performance advantage of approximately 3 dB over KK receivers. However, in cases of strong air turbulence, this performance advantage is negligible.

The Shanghai Fudan University team implemented 10Gbaud PS-4096QAM-OFDM transmission based on KK detection on a 25-meter FSO link in a complete atmospheric environment through a training iteration plan [4], confirming the application value of KK receivers in FSO coherent communications.

A team from the University of Arizona in Tucson, Arizona, USA proposed an eight-state FSO system based on the KK scheme[5]. Systematically simple and extremely low-cost secure communication is achieved in both weak and moderate atmospheric turbulence states, ultimately achieving a total SKR (Key Generation Rate) of 2.1 Gb/s.

The above research cases show that KK receivers or other forms of mathematical tools are of great help to FSO communications. However, on the one hand, the traditional Hilbert-KK algorithm lacks flexibility, thus causing a waste of power consumption when restoring the optical electric field [6] - [8]. This will not only increase the communication power consumption of the satellite, but also increase the weight of the satellite. On the other hand, there are so many technologies to choose from in FSO communications that it is difficult to choose the most suitable technology combination. In view of my dual background in mathematics and optical communication and based on my master's degree research, my doctoral research proposed to use FFT-KK to achieve low-cost FSO coherent communication and develop an FSO performance evaluation function and use this function to evaluate FSO coherent communication. Technical selection and parameter settings for performance testing. The FFT-KK algorithm proposed in the master's degree is very suitable for FSO communication systems that are more sensitive to power consumption and weight. While implementing the application of this algorithm, the evaluation function will be used to optimize its parameter settings, thereby ultimately achieving low-cost FSO coherent communication.

The performance evaluation function will be based on mathematical modeling and optimization theory, comprehensively considering the performance indicators and mutual impacts of each technology selection in the FSO communication system, including but not limited to signal attenuation, dispersion, nonlinear effects, signal-to-noise ratio, bit error rate, etc. Key performance parameters. Through the mathematical description and analysis of these parameters, and considering their specific effects in different communication scenarios, this research aims to construct a mathematical framework that can comprehensively evaluate system performance and use this framework to guide the selection and combination of technical solutions to achieve The optimal balance between performance and cost [9].

This research will use advanced mathematical tools and optimization algorithms, such as multi-objective optimization, genetic algorithm, particle swarm optimization, etc., to find the best combination of technologies. In addition, the research will test and verify the effectiveness and practicality of the proposed performance evaluation function through simulation models and possible experimental verification.

2. Research objectives

This research aims to achieve low-cost FSO coherent communication using existing and proposed mathematical tools. The first is to use the theoretical results obtained during the master's degree to develop a highly flexible and low- power-consumption FSO coherent communication solution based on the FFT-KK algorithm. Subsequently, a set of comprehensive performance evaluation functions will be created to evaluate and optimize the performance and cost of the FSO communication technology portfolio. Finally, the effectiveness of the proposed scheme is verified through simulation and experiments, providing a theoretical and practical basis for the realization of a low-cost FSO coherent communication system.

3. Research methods

This research will first optimize the FFT-KK algorithm based on the characteristics of the FSO system to enhance its adaptability and computational efficiency under complex atmospheric conditions and reduce power consumption. Research will be conducted through algorithm simulation, optimization and testing, considering performance under different atmospheric turbulence models. Subsequently, in the development of the performance evaluation function, a set of comprehensive evaluation functions were developed based on the key performance indicators of the optical communication system (such as signal-to-noise ratio, bit error rate, etc.) and system cost. This function will comprehensively consider the performance impact and cost-effectiveness of technical solutions and support the selection and optimization of technical solutions in different application scenarios. Finally, system simulation and experimental verification of the overall FSO coherent system are carried out. The developed FFT-KK algorithm and performance evaluation function are used to construct a simulation model of the FSO communication system. Through simulation experiments, the performance and cost-effectiveness of different technical solutions are analyzed to further optimize the system design. Finally, low-cost FSO coherent communication is achieved with the help of two mathematical tools.

4. Schedule

Year 1: Publish journal papers based on the research results obtained during the master's degree. Then a literature review was conducted on the research content during the doctoral period, a performance evaluation model was initially established, and basic simulation experiments were started.

Year 2: In-depth model and algorithm development, conduct extensive simulation experiments, optimize models and algorithms, and expand the scale of experiments.

Year 3: Complete experimental verification, summarize research results, write and submit a doctoral thesis.

Reference

- [1] R. Lange and B. Smutny, "Homodyne BPSK-based optical intersatellite communication links," in Proc. SPIE Free Space Laser Commun. Technol. XIX, vol. 6457. 2007, pp. 1–9.
- [2] L. Xu, I. B. Djordjevic and T. Wang, "Digital coherent communication and advanced coding technologies for ultra-long-haul optical transmissions," 9th International Conference on Optical Communications and Networks (ICOON 2010), Nanjing, 2010, pp. 227-229, doi:10.1049/cp.2010.1192.
- [3] Antonio Mecozzi, Cristian Antonelli, and Mark Shtaif, "Kramers–Kronig receivers," Adv. Opt. Photon. 11, 480-517 (2019)
- [4] Fujita, T.; Toba, K.; Sampath, K.I.A.; Maeda, J. Impact of Sampling and Quantization on Kramers-Kronig Relation-Based Direct Detection. IEICE Trans. Commun. 2020, 1291–1298.
- [5] K. Toba, T. Fujita, E. Tsukui, K. I. A. Sampath and J. Maeda, "A Study on Sampling Penalties Reduction of Kramers-Kronig Receivers," in Journal of Lightwave Technology, vol. 39, no. 19, pp. 6054-6062, Oct.1, 2021, doi: 10.1109/JLT.2021.3099938.
- [30] Antonio Mecozzi, Cristian Antonelli, and Mark Shtaif, "Kramers–Kronig coherent receiver," Optica 3, 1220-1227 (2016)
- [6] Nagh shvarianjahromi M, Kumar S, Deen M J. Free space ground to satellite optical communications using Kramers–Kronig transceiver in the presence of atmospheric turbulence[J]. Sensors, 2022, 22(9): 3435.
- [7] Wei Y, Zhou Y, Liu C, et al. C-Band PS 4096QAM OFDM FSO transmission with 6.98 bit/s/Hz net SE based on Kramers-Kronig detection[C]//Optical Fiber Communication Conference. Optica Publishing Group, 2020: W1G. 5.
- [8] Z. Qu and I. B. Djordjevic, "High-Speed Free-Space Optical Continuous Variable-Quantum Key Distribution Based on Kramers–Kronig Scheme," in IEEE Photonics Journal, vol. 10, no. 6, pp. 1-7, Dec. 2018, Art no. 7600807, doi: 10.1109/JPHOT.2018.2875590.
- [9] R. S. Tucker, "Green Optical Communications—Part II: Energy Limitations in Networks," in IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics, vol. 17, no. 2, pp. 261-274, March-April 2011, doi: 10.1109/JSTQE.2010.2051217.

IV 学生レポート等

平田 伸哉

Can On-chain Transaction Activities Predict Bitcoin Realized Volatility?

九州大学大学院マスフォアイノベーション関係学府

指導教員：瀧本 太郎

学生番号：2MI22201M

氏 名：平田 伸哉

Abstract

Bitcoin is growing its attention as a cryptocurrency. Recognizing the importance of accurately forecasting financial asset volatility for risk management and trading strategies, the research delves into the potential of blockchain transaction patterns, specifically chainlets, as a novel metric for enhancing volatility predictions. We used heterogeneous autoregressive realized volatility (HAR-RV) models with chainlet information to clarify the predictive power of chainlets for the Bitcoin realized volatility. We showed that incorporating chainlets significantly enhances the prediction accuracy of the realized volatility of Bitcoin. Key findings reveal a negative correlation between left extreme and relay chainlets with the realized volatility, while sweep and distribution chainlets show no significant impact. These findings offer valuable implications for enhancing risk management strategies and refining option pricing models.

本プログラムにおける今後3年間の活動の方向と到達目標

平田 伸哉(2MI22201M)

マス・フォア・イノベーション連係学府 経済学系

指導教員：瀧本 太郎, 共創メンター：白井 朋之

令和5年度

・今後の研究方針と博士論文の展望

私は現在、ビットコインのボラティリティを「chainlet」という特徴を通じて予測するモデルに焦点を当てて研究しています。今後の展望としては、このモデルをさらに洗練させ、「chainlet」の各成分がボラティリティにどのように寄与するかというメカニズムを明らかにすることを目指しています。さらに、多変量モデルへの拡張を計画しており、これによりマクロ経済変数など他の要因との関連性を探り、経済理論や金融工学などの枠組みと結びつけたいと考えています。最終的には仮想通貨の価格やボラティリティの性質について包括的に研究を行い、博士論文としてまとめることを目標にしています。

数学共創モデリングではビットコインのUTXOについて確率モデルを作成しました。数学創発モデリングではさらにモデルを改善したりデータ解析をしたりしてビットコインの取引の性質を明らかにして学会や論文で発表したいです。

・共創力強化インターンシップへの展望

私は産学連携インターンシップに特に興味があります。特に、金融関係の研究所での産学連携インターンシップに参加し、実践的な研究経験を積むことにより、私の専門分野であるビットコインのボラティリティ分析の知見を深めたいと考えています。

・卓越大学院イベントに関する抱負

令和4年度、SGWでは、貿易関連企業のテキストマイニングプロジェクトに取り組み、チーム全体をまとめ上げる役としてプロジェクトを推進しました。令和5年度以降は、経済学や統計学などの知識を今まで以上に生かして、さらなる貢献をしたいと考えています。

・セミナー、研究集会への参加状況、研究発表状況

セミナーにおいては、瀧本ゼミでHogg et al.(2019)などを輪読し、学部時代のゼミではTAとして高橋(2022)などに取り組んできました。また、白井先生のセミナーでは竹居(2020)を輪読することで確率モデルの基礎を学ぶ機会となりました。さらに、共創モデリングでは、ビットコインの確率モデルに関する研究を進め、その成果を「Blockchain Kaigi 2023」で神戸の理化学研究所で発表しました。今後は修士論文をさらに改善し、応用経済

IV 学生レポート等

学会などで発表することを目標に努力します。

・参考文献

高橋将宜 (2022) Wonderful R 5 統計的因果推論の理論と実装 潜在的結果変数と欠測データ, 共立出版株式会社.

竹居正登 (2020) 入門 確率過程, 森北出版株式会社.

Robert V. Hogg, Joseph W. McKean, and Allen T. Craig (2019) *Introduction to mathematical statistics, 8th ed.*, Boston: Pearson.